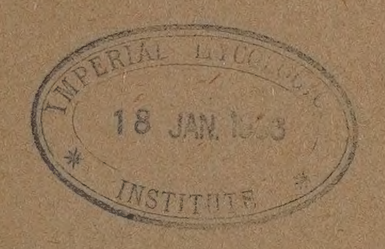
1931 № 8

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК



BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ · EXEMPLE DE CITATION

Б. С. Швецов. О расслаивании стекла при его застывании.
ИМЕН, 1931, № 8, стр. 1141.

B. Švecov. La dissociation en couches du verre à la congélation.
BAS-MN, 1931, № 8, p. 1141 (en russe).

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Ноябрь 1931 г.

Непременный Секретарь академик *В. Волгин*

Редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Сдано в набор в августе 1931 г. — Подписано к печати 21 ноября 1931 г.

Технический редактор Л. А. Федоров

Ученый корректор Г. А. Стратановский

АНИ № 151. — $Б_5$. — 126 (1025—1150) стр. — $8^1/_8$ печ. л. — 40000 печ. зн. — Тираж 1300

Ленинградский Областлит № 25046. — Заказ № 1542.

Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

SUR LA LIMITATION DES VALEURS D'UN POLYNÔME $P_n(x)$ DE DEGRÉ n SUR TOUT UN SEGMENT PAR SES VALEURS EN $(n+1)$ POINTS DU SEGMENT

Par SERGE BERNSTEIN

1. Dans mon article «Quelques remarques sur l'interpolation» j'ai posé la question suivante:*

Déterminer le polynôme

$$A_{n+1}(x) = (x - a_0) \dots (x - a_n)$$

ayant toutes ses racines sur le segment $(-1, +1)$, tel que le maximum de

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} \left| \frac{A_{n+1}(x)}{(x - a_i) A'_{n+1}(a_i)} \right| \quad (1)$$

sur le segment soit aussi petit que possible.

J'ai indiqué au même endroit que ce minimum M est de l'ordre de $\log n$ et que de plus le maximum de $F(x)$ est effectivement de l'ordre $\log n$ sur le segment $(-1, +1)$, lorsque

$$A_{n+1}(x) = C \cos (n+1) \arccos x.$$

Presqu'en même temps (et d'une façon tout à fait indépendante) M. Faber établissait la première partie de mon affirmation.** Pour ce qui concerne la

* Comm. Soc. Math. Charkow, t. XIV (1914).

** Über die interpolatorische Darstellung stetiger Functionen. Jahresber. D. Math. Ver. 23 1914).

seconde partie de cette affirmation, M. M. Gronwall * et Grandjot ** ont demontré plus tard une proposition équivalente, où le segment $(-1, +1)$ est remplacé par la circonférence de rayon un, et

$$A_{n+1}(x) = x^{n+1} - 1.$$

Je reviens á présent sur cette question pour calculer la valeur asymptotique de M qui se trouve être égale à

$$M \sim \frac{2}{\pi} \log n, \tag{2}$$

d'où il résulte qu'aucune distribution des noeuds a_i ne permet d'abaisser asymptotiquement le maximum de (1) correspondant à

$$A_{n+1}(x) = C \cos(n+1) \arccos x.$$

Je rappellerai d'abord que la fonction $F(x)$ représente dans chacun des $n+2$ intervalles $(-1, a_0)$, (a_0, a_1), ... $(a_n, 1)$, respectivement, le polynôme de degré n qui est le plus grand en valeur absolue dans cet intervalle parmi tous ceux, dont le module ne dépasse pas 1 aux points $a_0, a_1, \ldots, a_n$. En effet, le polynôme $P_n(x)$ réalisera le maximum absolu dans l'intervalle (a_k, a_{k+1}), d'après la formule

$$P_n(x) = A_{n+1}(x) \sum_0^n \frac{P_n(a_i)}{(x - a_i) A'_{n+1}(a_i)},$$

si $|P_n(a_i)| = 1$, pour $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, lorsque $P_n(a_k) P_n(a_{k+1}) > 0$ et $P_n(a_i) . P_n(a_{i+1}) < 0$ quand $i \gtrless k$.

Il paraît probable que le plus grand des $n+2$ maxima de $F(x)$ correspondant a tous ces intervalles sera minimé, lorsque tous les maxima

* Gronwall. A sequence of Polynomials connected with the roots of unity. Bull. Amer. Math. Soc. t. 27, 1920—1921.

** Grandjot. Über Polynome die in Einheitskreis beschränkt sind. Jahresber. der D. Math, Ver. 34 (1925).

seront égaux.* Mais je n'ai pu prouver cette affirmation que sous la condition que n croit indéfiniment, et ce n'est que ce dernier cas que nous examinerons actuellement.

2. Considerons d'abord une classe assez étendue de polynômes $A_{n+1}(x)$, pour lesquels tous les $n+2$ maxima de (1) sont asymptotiques à

$$\frac{2}{\pi}\log n.$$

Supposons que les $n+1$ racines a_i du polynôme $A_{n+1}(x)$ ont pour valeur

$$a_i = b_i + \frac{\psi(b_i)}{n+1}\sqrt{1-b_i^2}, \tag{3}$$

où $b_i = \cos\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n+1}$ et $\psi(x)$ est une fonction continue de x que dans chaque intervalle $(b_i \leqslant x \leqslant b_{i+1})$ nous pouvons, par exemple, interpoler linéairement en l'égalant ainsi à

$$\psi(x) = \psi(b_i) + \frac{x-b_i}{b_{i+1}-b_i}[\psi(b_{i+1})-\psi(b_i)]$$

nous poserons de plus $\psi(\pm 1) = 0$, et admettrons qu'il existe deux constantes $A > 0$, $\delta > 1$, telles que

$$|\psi(x)-\psi(y)| \leqslant \frac{A}{|\log(x-y)|^{\delta}} \tag{4}$$

pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

* Pour $n = 2$, par exemple, le polynôme $A_{n+1}(x) = \left(x^2 - \frac{8}{9}\right)$ conduit au minimum $M = \frac{5}{4}$ des maxima de $F(x)$, atteint aux 4 points: ± 1, $\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$; observons que le polynôme de Tchébycheff $x\left(x^2-\frac{3}{4}\right)$ qui donne $M = \frac{5}{3}$ ne réalise donc pas le minimum pour n quelconque.

Dans ces conditions, on aura

$$A_{n+1}\left(x+\frac{\psi(x)\sqrt{1-x^2}}{n+1}\right)=\prod_{i=0}^{n}\left[x+\frac{\psi(x)\sqrt{1-x^2}}{n+1}-\left(b_i+\frac{\psi(b_i)\sqrt{1-b_i^2}}{n+1}\right)\right]=$$

$$(5)\qquad =\prod_{i=0}^{n}(x-b_i)\left[1+\frac{\psi(x)\sqrt{1-x^2}-\psi(b_i)\sqrt{1-b_i^2}}{(n+1)(x-b_i)}\right]=$$

$$=\frac{p_n(x)}{2^n}\cos(n+1)\arccos x,$$

où

$$(6)\qquad p_n(x)=\prod_{i=0}^{n}\left[1+\frac{\psi(x)\sqrt{1-x^2}-\psi(b_i)\sqrt{1-b_i^2}}{(n+1)(x-b_i)}\right]=e^{f_n(x)}$$

en posant

$$(7)\qquad f_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\psi(x)\sqrt{1-x^2}-\psi(b_i)\sqrt{1-b_i^2}}{(n+1)(x-b_i)}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{\psi(x)\sqrt{1-x^2}-\psi(b_i)\sqrt{1-b_i^2}}{(n+1)(x-b_i)}\right]^2+\dots$$

Or, quel que soit le nombre positif ε, il est possible de choisir n assez grand pour avoir

$$(8)\qquad \rho_i(x)=\left|\frac{\psi(x)\sqrt{1-x^2}-\psi(b_i)\sqrt{1-b_i^2}}{(n+1)(x-b_i)}\right|<\varepsilon.$$

En effet, soit, par exemple, $b_i>x>0$; on aura

$$|\rho_i(x)|\leqslant\left|\frac{\psi(x)-\psi(b_i)}{(n+1)(x-b_i)}\sqrt{1-b_i^2}\right|+$$

$$+\left|\psi(x)\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-b_i^2}}{(n+1)(x-b_i)}\right|<\frac{A\sqrt{1-b_i^2}}{(n+1)|x-b_i|\,|\log(b_i-x)|^{\delta}}+$$

$$+\left|\frac{2\psi(x)}{(n+1)(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-b_i^2})}\right|,$$

où le premier terme du second membre peut être remplacé par

$$\left|\frac{\psi(b_{i+1})-\psi(b_i)}{(n+1)(b_{i+1}-b_i)}\sqrt{1-b_i^2}\right| < \frac{A\sqrt{1-b_i^2}}{(n+1)(b_i-b_{i+1})\,|\log(b_i-b_{i+1})|^{\delta}},$$

si

$$b_i > x > b_{i+1}.$$

Donc,

$$(9)\qquad |\rho_i(x)| < \frac{A\sin\frac{i+\frac{1}{2}}{n+1}\pi}{2(n+1)\sin\frac{\pi}{2(n+1)}\sin\frac{i+1}{n+1}\pi\,|\log(b_i-b_{i+1})|^{\delta}} +$$

$$+\frac{2A}{(n+1)\sqrt{1-x^2}\,|\log(1-x)|^{\delta}} < \frac{A}{2\,|\log(b_i-b_{i+1})|^{\delta}} +$$

$$+\frac{2A}{(n+1)\sin\frac{\pi}{2(n+1)}\left|\log\left(1-\cos\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right|^{\delta}} < \frac{3A}{\log\left(\frac{n+1}{\pi}\right)}.$$

Par conséquent, $f_n(x)$ se met sous la forme

$$f_n(x) = \sum_0^n \frac{\psi(x)\sqrt{1-x^2}-\psi(b_i)\sqrt{1-b_i^2}}{(n+1)(x-b_i)}(1+\varepsilon_i),$$

où

$$\varepsilon_i = 0\left(\frac{1}{\log n}\right)^{\delta}.$$

Ainsi, n croîssant infiniment, on aura $(x=\cos\theta)$

$$(11)\qquad \lim f_n(x) = f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi(\cos\theta)\sin\theta-\psi(\cos\varphi)\sin\varphi}{\cos\theta-\cos\varphi}\,d\varphi$$

pourvu qu'il soit établi que l'intégrale

$$(12)\qquad I=\int_0^{\pi}\left|\frac{\psi(\cos\theta)\sin\theta-\psi(\cos\varphi)\sin\varphi}{\cos\theta-\cos\varphi}\right|d\varphi$$

a un sens. (Dans ces deux formules $\psi(x)$ représente la limite vers laquelle tend la fonction $\psi(x)$ correspondant aux polynômes $A_{n+1}(x)$, lorsque n croit

infiniment, et elle satisfait aussi manifestement á la condition (4), si dans celle-ci la constante A ne dépend pas de n).

Or, on a

$$I \leqslant I_1 + I_2,$$

où

$$I_1 = \int_0^\pi \left| \frac{\psi(\cos\theta) - \psi(\cos\varphi)}{\cos\theta - \cos\varphi} \right| \sin\theta \, d\varphi, \quad I_2 = \int_0^\pi \left| \psi(\cos\varphi) \frac{\sin\theta - \sin\varphi}{\cos\theta - \cos\varphi} \right| d\varphi.$$

On trouvera une démonstration de la convergence de la première intégrale sous la condition (4) dans mon mémoire «Polynômes orthogonaux relatifs à un segment fini», ch. II, § 9 (Journ. de Math. 1930). Pour ce qui concerne la seconde, on a

$$I_2 = \int_0^\pi \left| \psi(\cos\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\theta + \varphi}{2} \right| d\varphi = \int_\theta^{\pi+\theta} \left| \psi(\cos(u - \theta)) \operatorname{ctg} \frac{u}{2} \right| du,$$

et il suffit d'observer que l'expression sousintégrale ne peut devenir infinie, que si $\Theta = 0$ ou $\Theta = \pi$, mais alors dans le voisinage de 0, par exemple, on a

$$\left| \psi(\cos u) \operatorname{ctg} \frac{u}{2} \right| < \frac{A}{u (\log u)^\delta}.$$

Par conséquent, on a uniformement sur $(-1, +1)$

$$\lim f_n(x) = f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\psi(\cos\theta)\sin\theta - \psi(\cos\varphi)\sin\varphi}{\cos\theta - \cos\varphi} d\psi, \tag{11}$$

d'où

$$\lim p_n(x) = p(x) = e^{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\psi(\cos\theta)\sin\theta - \psi(\cos\varphi)\sin\varphi}{\cos\theta - \cos\varphi} d\varphi}. \tag{13}$$

J'observerai encore que, sous les conditions énoncées, $\psi(\cos\theta)$ est développable en série de sinus uniformément convergente

$$\psi(\cos\theta) = c_1 \sin\theta + c_2 \sin 2\theta + \ldots + c_k \sin k\theta + \ldots,$$

il en résulte, d'après (11), que $-f(\cos\theta)$ sera représenté par le développement conjugué

$$-f(\cos\theta)=-\log p(x)=c_1\cos\theta+c_2\cos 2\theta+\ldots+c_k\cos k\theta+\ldots$$

qui sera également uniformément convergent.*

On conclut par le même raisonement que $p(x)$ est une fonction continue de x.

Ainsi, n croîssant indéfiniment, on a

$$\lim_{n=\infty}\frac{2^n A_{n+1}\left(x+\frac{\psi(x)\sqrt{1-x^2}}{n+1}\right)}{\cos(n+1)\arccos x}=p(x). \tag{14}$$

En effectuant le changement de variables

$$z=x+\frac{\psi(x)\sqrt{1-x^2}}{n+1}, \tag{15}$$

où z est une fonction monotone de x, on trouve

$$x=z-\frac{\psi_1(z)\sqrt{1-z^2}}{n+1}=z-\frac{\psi(z)\sqrt{1-z^2}}{n+1}+\frac{\alpha}{n+1},$$

où, d'après (9),

$$\alpha=\psi(z)\sqrt{1-z^2}-\psi(x)\sqrt{1-x^2}=0\left[\frac{(n+1)(x-z)}{(\log n)^\delta}\right]=$$

$$=0\left[\frac{\psi(x)\sqrt{1-x^2}}{(\log n)^\delta}\right]=0\left[\frac{\psi(z)\sqrt{1-z^2}}{(\log n)^\delta}\right],$$

c'est-à-dire que

$$\psi_1(z)=\psi(z)+0\left(\frac{\psi(z)}{(\log n)^\delta}\right) \tag{16}$$

* Dans le mémoire cité plus haut on trouvera, inversement, l'expression de $\psi(x)$ au moyen de $f(x)$ sous forme d'intégrale:

$$\psi(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi f}\frac{(\cos\theta)-f(\cos\varphi)}{\cos\theta-\cos\varphi}\sin\theta\,d\varphi.$$

satisfait également a la condition (4), et l'expression de $p(x)$ ne sera pas modifiée, si l'on y remplace ψ par ψ_1.

Donc, la rélation (5) peut également être mise sous la forme

$$A_{n+1}(z) = \frac{1}{2^n} \frac{p_n\left(z - \frac{\psi_1(z)\sqrt{1-z^2}}{n+1}\right)}{\cos(n+1)\arccos\left(z - \frac{\psi_1(z)\sqrt{1-z^2}}{n+1}\right)}$$

et la formule (14) conduit à

$$(17) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{2^n A_{n+1}(z)}{\cos(n+1)\arccos\left[z - \frac{\psi_1(z)\sqrt{1-z^2}}{n+1}\right]} = p(z).$$

La formule (17) donne évidement pour $A_{n+1}(z)$ l'expression asymptotique sur $(-1, +1)$*

$$(17\text{ bis}) \qquad A_{n+1}(z) \sim \frac{p(z)}{2^n} \cos(n+1)\arccos\left[z - \frac{\psi_1(z)\sqrt{1-z^2}}{n-1}\right] \sim$$

$$\sim \frac{p(z)}{2^n} \cos(n+1)\arccos\left[z - \frac{\psi(z)\sqrt{1-z^2}}{n+1}\right].$$

La première expression asymptotique a l'avantage sur celle qui s'en déduit en remplaçant $\psi_1(z)$ par $\psi(z)$ (ou par leur limite commune pour $n = \infty$) d'avoir ses racines rigoureusement les mêmes que le polynôme $A_{n+1}(z)$.

Calculons encore la valeur de

$$A'_{n+1}(a_h) = (a_h - a_0) \ldots (a_h - a_{h-1})(a_h - a_{h+1}) \ldots (a_h - a_n).$$

* Par un calcul analogue, on trouve, à l'extérieur de $(-1, +1)$ l'expression asymptotique $A_{n+1}(z) \sim \frac{p(z)}{2^{n+1}}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)^{n+1}$, où $p(z) = e^{-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\psi(u)\,du}{z-u}}$, les conditions imposées à $\psi(x)$ étant beaucoup moins restrictives: il suffit que $\frac{\psi(b_i)\sqrt{1-b_i^2}}{n+1}$ dans (3) tende uniformément vers 0 et que la fonction (limite) $\psi(x)$ soit absolument intégrable.

On aura ainsi

$$(18) \qquad A'_{n+1}(a_h) = \left[b_h - b_0 + \frac{\psi(b_h)\sqrt{1-b_h^2} - \psi(b_0)\sqrt{1-b_0^2}}{n+1}\right]\cdots$$

$$\cdots\left[b_h - b_n + \frac{\psi(b_h)\sqrt{1-b_h^2} - \psi(b_n)\sqrt{1-b_n^2}}{n+1}\right] =$$

$$= (b_h - b_0)\cdots(b_h - b_{h-1})(b_h - b_{h+1})\cdots$$

$$\cdots(b_h - b_n)\left[1 + \frac{\psi(b_h)\sqrt{1-b_h^2} - \psi(b_0)\sqrt{1-b_0^2}}{(n+1)(b_h - b_0)}\right]\cdots =$$

$$= \frac{n+1}{2^n}\frac{\sin(n+1)\arccos b_h}{\sqrt{1-b_h^2}} p_n(b_h)\left[1 + 0\left(\frac{1}{\log n}\right)^\delta\right] =$$

$$= \frac{(-1)^h(n+1)}{2^n\sqrt{1-b_h^2}} p(b_h)\left[1 + 0\left(\frac{1}{\log n}\right)^\delta\right],$$

car le terme $1 + p_h(b_h)$ qui manque dans notre produit est la limite de $1 + p_h(x)$ lorsque x tend vers b_h.

Ainsi, on a uniformement

$$\lim \frac{2^n A'_{n+1}(a_h)}{(n+1)}\sqrt{1-b_h^2} = (-1)^h p(b_h)$$

et, finalement,

$$(19) \qquad \lim \frac{2^n A'_{n+1}(a_h)}{n+1}\sqrt{1-a_h^2} = (-1)^h p(a_h),$$

car, on a d'une part, en vertu de la continuité de $p(x)$,

$$\lim \frac{p(a_h)}{p(b_h)} = 1$$

et, d'autre part,

$$\frac{1-a_h^2}{1-b_h^2} = 1 - \frac{2b_h\psi(b_h)}{(n+1)\sqrt{1-b_h^2}} - \frac{\psi^2(b_h)}{(n+1)^2} = 1 + 0\left(\frac{1}{\log n}\right)^\delta.$$

3. Après ce qui précède, la valeur asymptotique de la fonction (1) correspondant à $A_{n+1}(x)$ se calcule aisément.

Nous aurons, en effet,

$$(20)\quad F(x)\sim p(x)\cos(n+1)\arccos\left[x-\frac{\psi_1(x)\sqrt{1-x^2}}{n+1}\right]\sum_0^n\frac{\sqrt{1-a_h^2}}{(n+1)|x-a_h|p(a_h)}.$$

Posons $x=\cos\varphi$ et $a_h=\cos\theta_h$, et soit $\theta_{k+1}<\varphi<\theta_k$.

On aura manifestement

$$(21)\quad F(x)\sim\left|\cos(n+1)\arccos\left[x-\frac{\psi_1(x)\sqrt{1-x^2}}{n+1}\right]\right|\sum_0^n\frac{\sin\theta_h}{(n+1)|\cos\theta_h-\cos\varphi|},$$

pourvu que $F(x)$ augmente infiniment avec n, car ε étant un nombre positif arbitrairement petit, on peut fixer δ indépendamment de n, tel que l'on ait $\left|\frac{p(x)}{p(a_h)}-1\right|<\varepsilon$ lorsque $|x-a_h|<\delta$; en même temps, l'ensemble des termes correspondant aux valeurs des racines a_h extérieures à cet intervalle éprouvera par le passage de (20) à (21) une variation inférieure à $\frac{L-1}{\delta}$, où L est le maximum de $\frac{p(y)}{p(z)}$ pour $-1\leqslant y\leqslant 1$, $-1\leqslant z\leqslant 1$. Or, à cause des relations

$$y=x-\frac{\psi_1(x)\sqrt{1-x^2}}{n+1},\quad x=y+\frac{\psi(y)\sqrt{1-y^2}}{n+1},$$

où

$$\psi_1(x)=\psi(x)+0\left(\frac{\psi(x)}{(\log n)^{\delta}}\right)$$

nous tirons de

$$\arccos y-\arccos x=\frac{x-y}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

ξ étant compris entre x et y, que

$$\frac{\psi_1(x)}{n+1}=\frac{x-y}{\sqrt{1-x^2}}<\arccos y-\arccos x<\frac{x-y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{\psi(y)}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Donc,

$$(22)\quad \arccos x=\arccos y-\frac{\psi(y)}{n+1}+0\left(\frac{1}{(n+1)(\log n)^{\delta}}\right).$$

Ainsi, en particulier, pour

$$x = \cos\theta_h,\ y_h = \cos\frac{h+\frac{1}{2}}{n+1}\pi,$$

on aura

$$(23)\qquad (n+1)\theta_h = \left(h+\frac{1}{2}\right)\pi - \psi(y_h) + 0\left(\frac{1}{(\log n)^\delta}\right)$$

et

$$(n+1)(\theta_{h+1} - \theta_h) = \pi + 0\left(\frac{1}{(\log n)^\delta}\right).$$

De même, si

$$x = \cos\varphi_k$$

correspond à

$$y = \cos\frac{k+1}{n+1}\pi,$$

on a

$$(24)\qquad (n+1)\varphi_k = (k+1)\pi - \psi\left(\cos\frac{k+1}{n+1}\pi\right) + 0\left(\frac{1}{(\log n)^\delta}\right)$$

de sorte que

$$\varphi_k = \frac{\theta_k + \theta_{k+1}}{2} + 0\left(\frac{1}{n(\log n)^\delta}\right).$$

Par conséquent, la somme qui figure dans (21) se mettra pour la valeur φ_k sous la forme asymptotique

$$(25)\quad \sum_0^n \frac{\sin\theta_k}{(n+1)|\cos\theta_k - \cos\varphi_k|} \sim \frac{1}{\pi}\int_0^{\theta_k}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos\theta - \cos\varphi_k} + \frac{1}{\pi}\int_{\theta_{k+1}}^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos\varphi_k - \cos\theta}$$

et, puisque aux points $\cos\varphi_k$ que nous considérons, on a

$$\cos(n+1)\arccos\left[x - \frac{\psi_1(x)\sqrt{1-x^2}}{n+1}\right] = \pm 1,$$

nous obtenons finalement

$$(26) \qquad F(\cos\varphi_k) \sim \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\theta_k} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos\theta - \cos\varphi_k} + \int_{\theta_{k+1}}^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos\varphi_k - \cos\theta}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\log\frac{\sin^2\varphi_k}{(\cos\theta_k - \cos\varphi_k)(\cos\varphi_k - \cos\theta_{k+1})} = \frac{1}{\pi}\log\frac{1}{4\sin\frac{\varphi_k - \theta_k}{2}\sin\frac{\theta_{k+1} - \varphi_k}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\log\frac{\sin^2\varphi_k}{\sin\frac{\varphi_k + \theta_k}{2}\sin\frac{\varphi_k + \theta_{k+1}}{2}} \sim \frac{2}{\pi}\log n.$$

De même, en posant $x = 1$ (ou $x = -1$), on déduit de (21) que

$$(26 \text{ bis}) \qquad F(1) \sim \frac{1}{n+1}\sum_0^n \frac{\sin\theta_i}{1 - \cos\theta_i} \sim \frac{1}{\pi}\int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{1 - \cos\theta} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\log\frac{2}{1 - \cos\theta_0} = \frac{2}{\pi}\log\frac{1}{\sin\frac{\theta_0}{2}} \sim \frac{2}{\pi}\log n.$$

Il est donc établi la fonction $F(x)$ a tous ses $n+2$ maxima asymptotiquement égaux à $\frac{2}{\pi}\log n$.

4. Nous allons montrer à présent de la façon la plus simple qu'il est impossible, de donner une distribution de noeuds $a_0, a_1, \ldots, a_n$, pour lesquels tous le maxima dans un intervalle arbitraire fixe du segment $(-1, +1)$ de $F(x)$ soient asymptotiquement inférieures à $\frac{1}{4}\log n$. A cet effet, commençons par établir le lemme suivant:

Si le polynôme $A(x)$ a toutes ses racines $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \ldots < a_n$ réelles, on a

$$(27) \qquad \left|A\left(\frac{a_{k+1} + a_k}{2}\right)\right| \geqslant \frac{a_{k+1} - a_k}{4}\sqrt{|A'(a_k) \cdot A'(a_{k+1})|},$$

(le signe d'égalité n'ayant lieu que, lorsque $A(x)$ est du second degré).

En effet, en posant

$$a_{k+1} - a_k = \delta, \quad a_{k+i+1} - a_{k+1} = p_i, \quad a_k - a_{k-i} = q_i$$

on a

$$\left[A\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)\right]^2 =$$

$$= \frac{\delta^4}{16}\left(\frac{\delta}{2} + p_1\right)^2 \cdots \left(\frac{\delta}{2} + p_{n-k-1}\right)^2 \left(\frac{\delta}{2} + q_1\right)^2 \cdots \left(\frac{\delta}{2} + q_k\right)^2,$$

$$|A'(a_k)| = \delta(\delta + p_1) \ldots (\delta + p_{n-k-1}) q_1 \ldots q_k,$$

$$|A'(a_{k+1})| = \delta(\delta + q_1) \ldots (\delta + q_k) p_1 \ldots p_{n-k-1}.$$

Donc, en remarquant que

$$\left(\frac{\delta}{2} + p_i\right)^2 \geqslant p_i(\delta + p_i), \left(\frac{\delta}{2} + q_i\right)^2 \geqslant q_i(\delta + q_i),$$

nous aurons

$$\left[A\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)\right]^2 \geqslant \frac{\delta^2}{16} |A'(a_k) . A'(a_{k+1})|.$$

Ce qui prouve notre affirmation.

D'autre part, observons que le polynôme de degré $2n$

$$P_{2n}(x) = \cos n \arccos \frac{2x^2 - (a^2 + b^2)}{b^2 - a^2} \qquad (b > a)$$

qui dans les deux intervalles (a, b) et $(-b, -a)$ ne depasse pas 1 en valeur absolue se réduit pour $x = 0$ à

$$P_{2n}(0) = \cos n \arccos \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^n + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n\right];$$

par conséquent, en posant

$$b - a = s > 0$$

et

$$a = \frac{\alpha}{2n},$$

on a

$$|P_{2n}(0)| = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{\alpha}{sn}\right)^n + \left(1 - \frac{\alpha}{sn}\right)^n\right].$$

Donc, a fortiori, si un polynôme de degré non inférieur à $2n$ est assujetti à rester inférieur en valeur absolue à 1 dans les intervalles (a, b) et $(-a, -c)$, où $0 < c < b$, il pourra atteindre la valeur asymptotique

$$\frac{1}{2} e^{\frac{\alpha}{s}}$$

à l'origine. Il en résulte que $F(x)$, qui entre a_k et a_{k+1} est un polynôme de degré n, ayant parmi tous les polynômes ne dépassant pas 1 sur $(-1, a_k)$ et $(a_{k+1}, 1)$ le plus grand module dans cet intervalle de longueur $\delta = a_{k+1} - a_k$, devra atteindre dans cet intervalle la valeur

$$\frac{1}{2} e^{\frac{\delta n}{2}}$$

car, au moins une des grandeurs $a_k + 1$ ou $1 - a_{k+1}$ est asymptotiquement non inférieure à $s = 1$.

Par conséquent, si nous voulons que cette valeur ne soit pas supérieure à $\frac{2}{\pi} \log n$, il est nécessaire que

$$e^{\frac{\delta n}{2}} < \frac{4}{\pi} \log n.$$

c'est-à-dire que

$$\frac{\delta n}{2} < \log \log n + \log \frac{4}{\pi}$$

ou (pour n trés grand) que

$$\delta < \frac{2 \log \log n}{n}. \tag{28}$$

Ainsi, nous pouvons ne nous occuper que des distributions des noeuds a_i, satisfaisant à cette inégalité (28).

Cela étant, appliquons l'inégalité (27) pour limiter inférieurement

$$I_k(x) = \left| A_{n+1}\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)\right| \left[\frac{1}{|(x - a_k) A'_{n+1}(a_k)|} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{|(x - a_{k+1}) A'_{n+1}(a_{k+1})|}\right], \tag{29}$$

x étant supposé extérieur à l'intervalle (a_k, a_{k+1}). Soit, $x < a_k < a_{k+1}$, pour fixer les idées; alors

$$I_k(x) > \frac{a_{k+1} - a_k}{4}\left[\frac{1}{a_k - x}\sqrt{\left|\frac{A'_{n+1}(a_{k+1})}{A'_{n+1}(a_k)}\right|} + \frac{1}{a_{k+1} - x}\sqrt{\left|\frac{A'_{n+1}(a_k)}{A'_{n+1}(a_{k+1})}\right|}\right]$$
$$\geqslant \frac{a_{k+1} - a_k}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(a_k - x)(a_{k+1} - x)}}.$$

Or, quel que soit $z > 0$, on a

$$\frac{z}{\sqrt{1+z}} > \log(1+z).$$

Donc, pour $x < a_k < a_{k+1}$, on a

(31) $$I_k(x) > \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k - x}\right) = \frac{1}{2}\log\frac{a_{k+1} - x}{a_k - x};$$

on obtiendra de même, pour $x > a_{k+1} > a_k$,

(31 bis) $$I_k(x) > \frac{1}{2}\log\frac{x - a_k}{x - a_{k+1}}.$$

Par conséquent, si ξ et x étant dans un intervalle fixe (α, β) du segment $(-1, +1)$, on a

$$|A_{n+1}(\xi)| \geqslant |A_{n+1}(x)|$$

on aura, en supposant que $a_h < \xi < a_{h+1}$

$$F(\xi) = |A_{n+1}(\xi)|\sum_0^n \frac{1}{(\xi - a_k)A'_{n+1}(a_k)} >$$
$$> \frac{1}{2}\sum_{k_0}^{h-1}\left\{\left|\frac{A_{n+1}\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)}{(\xi - a_k)A'_{n+1}(a_k)}\right| + \left|\frac{A_{n+1}\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)}{(\xi - a_{k+1})A'_{n+1}(a_{k+1})}\right|\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{h+1}^{k_1}\left\{\left|\frac{A_{n+1}\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)}{(\xi - a_k)A'_{n+1}(a_k)}\right| + \left|\frac{A_{n+1}\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)}{(\xi - a_{k+1})A'_{n+1}(a_{k+1})}\right|\right\},$$

où

$$\frac{a_{k_0} + a_{k_0 - 1}}{2} < \alpha \leqslant \frac{a_{k_0} + a_{k_0+1}}{2}, \quad \frac{a_{k_1} + a_{k_1+1}}{2} \leqslant \beta < \frac{a_{k_1+1} + a_{k_1+2}}{2}.$$

Donc,

$$(32)\qquad F(\xi) > \frac{1}{2}\left[\sum_{k_0}^{h-1} I_k(\xi) + \sum_{h+1}^{k_1} I_k(\xi)\right] >$$

$$> \frac{1}{4}\left[\sum_{k_0}^{h-1} \log\frac{\xi - a_k}{\xi - a_{k+1}} + \sum_{h+1}^{k_1} \log\frac{a_{k+1} - \xi}{a_k - \xi}\right] = \frac{1}{4}\log\frac{\xi - a_{k_0}}{\xi - a_h} +$$

$$+ \frac{1}{4}\log\frac{a_{k_1+1} - \xi}{a_{h+1} - \xi} \geqslant \frac{1}{4}\log 4(\xi - a_{k_0})(a_{k_1+1} - \xi) - \frac{1}{2}\log(a_{h+1} - a_h),$$

ou bien, si l'une des sommes disparaît, ce qui arrivera si le maximum est réalisé à l'extrémité de l'intervalle,

$$(32\text{ bis})\qquad F(\xi) > \frac{1}{4}\log\frac{\xi - a_{k_0}}{\xi - a_h} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4}\log\frac{\beta - a_{k_0}}{\beta - a_h} \sim \frac{1}{4}\log(\beta - \alpha) - \frac{1}{4}\log(a_{h+1} - a_h).$$

Ainsi, en tenant compte de (28), nous avons, pour n trés grand,

$$(33)\qquad F(\xi) > \frac{1}{2}\log n - 0(\log\log\log n)$$

si le maximum de $A_{n+1}(x)$ sur (α, β) est atteint en un point intérieur de (α, β), et, en tout cas,

$$(34)\qquad F(\xi) > \frac{1}{4}\log n - 0(\log\log\log n).$$

Ces inégalités subsistent aussi, lorsque $\beta - \alpha$ tend vers 0, pourvu que $(\beta - \alpha)\log\log n$ ne tende pas vers 0; si on supposait seulement que $(\beta - \alpha)n^{\varepsilon}$, où $\varepsilon < 1$ est un nombre fixe, ne tend pas vers 0, on pourrait encore fixer, d'après (32) et (32 bis), une constante k, telle que $F(\xi) > k\log n$, c'est à dire que même dans un intervalle quelconque de grandeur $\frac{1}{n^{\varepsilon}}$, un polynôme de degré n, borné en $n+1$ points du segment $(-1, +1)$, pourra croître comme $\log n$. Au contraire, si l'on suppose que $n(\beta - \alpha)$ ne croît pas infiniment on peut disposer des noeuds a_i sur $(-1, +1)$ pour que $F(x)$ reste borné sur (α, β). On peut exprimer

autrement la dernière affirmation: il est possible de choisir $(n+1)$ points du segment de longueur $2\,d$, où un polynôme de degré n reste inférieur à 1, de telle sorte qu'il reste borné dans tout l'intervalle $(-1, +1)$, pourvu que

$$n = 0\,(d).$$

En effet, de tous les polynômes de degré non supérieur à $2n+1$ qui aux points, où

$$P_{2n}(x) = \cos n \arccos \frac{2x^2 - b^2 - 1}{1 - b^2}$$

prend les valeurs ± 1, ne dépassent pas un en valeur absolue, c'est le polynôme $P_{2n}(x)$ qui sur le segment $(-1, +1)$ sera le plus grand possible

Or, il ne dépasse pas sur ce segment la valeur

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{b+1}{b-1}\right)^n + \left(\frac{b-1}{b+1}\right)^n\right] \sim \frac{1}{2}\left[e^{\frac{1}{\lambda}} + e^{-\frac{1}{\lambda}}\right],$$

si $d = (b+1) = 2\lambda n$, où $\lambda > 0$ est un nombre fixe.

5. Dans ce qui suit, pour donner plus de symétrie à nos calculs, nous remplacerons la formule d'interpolation de Lagrange par la formule d'interpolation trigonométrique correspondante, le théorème relatif aux polynômes en résultera, comme un corollaire. Ainsi, nous démontrons:

Théorème. *Quels que soient les $2n+1$ points sur $(-\pi, +\pi)$, où la somme trigonométrique d'ordre n à coefficients réels ou complexes*

$$S_n(\theta) = A_0 + A_1 \cos\theta + B_1 \sin\theta + \ldots + A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta$$

reste non supérieure en module a 1, elle pourra atteindre asymptotiquement la valeur $\frac{2}{\pi}\log n$.

La possibilité de ne pas dépasser cette valeur asymptotique a été demontrée par M. Grandjot* pour le cas des noeuds équidistants et elle a lieu aussi dans les conditions plus générales correspondantes à celles que nous avons étudiées au § 3 pour le cas du polynôme. Remarquons de suite

* L. c.

que le théorème énoncé étant supposé établi, on peut affirmer a fortiori que, si

$$|S_n(\theta_i)| \leqslant 1 \qquad (i=0, 1, \ldots, n),$$

et

$$S_n(\theta_i) = S_n(-\theta_i),$$

pour $i=1, 2, \ldots, n$, on a

$$S_n(\theta) \gtrsim \frac{2}{\pi} \log n.$$

Mais dans ce cas $S_n(\theta) = A_0 + A_1 \cos\theta + \ldots + A_n \cos n\theta$ ne contient pas les sinus, car la différence $S_n(\theta) - S_n(-\theta) = 0$ qui admet outre les $2n$ racines $\pm\theta_i$, la racine $\theta = 0$, aurait au moins $2n+1$ racines et par conséquent sera identiquement nulle.

Donc, en remarquant que, en posant $x = \cos\theta$, $S_n(\theta) = P_n(x)$, est un polynôme de degré n, nous constatons que pour n'importe quel choix de $n+1$ points $a_i = \cos\theta_i (i=0, 1, \ldots n)$ du segment $(-1, +1)$ le polynôme qui en ces points ne dépasse pas 1 en valeur absolue, peut atteindre la valeur asymptotique $\frac{2}{\pi}\log n$.

Ainsi, envisageons le cas général, où $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{2n}$ sont quelconques dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

Mais nous pouvons, sans restreindre la généralité, supposer $\theta_0 = 0$.

Alors la formule trigonométrique d'interpolation aura la forme

$$(35) \qquad S_n(\theta) = \frac{Q_{n+1}(\theta)}{2} \sum_{0}^{2n} \frac{S_n(\theta_i)}{\sin\frac{\theta-\theta_i}{2} Q'_{n+1}(\theta_i)},$$

où

$$(36) \qquad Q_{n+1}(\theta) = \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta-\theta_1}{2} \ldots \sin\frac{\theta-\theta_{2n}}{2}.$$

Donc,

$$(37) \qquad F_n(\theta) = \left|\frac{Q_{n+1}(\theta)}{2}\right| \sum_{0}^{2n} \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta-\theta_i}{2} Q'_{n+1}(\theta_i)\right|}$$

représentera en chaque point θ le plus grand module que peut effectivement atteindre la somme trigonométrique $S_n(\theta)$ d'ordre n assujétie à ne pas dépasser 1 en module aux points θ_i.

Observons, que les sommes trigonométriques réalisant les maxima auront leurs coéfficients réels (ou de même argument), puisqu'elles correspondent au cas où tous les termes de (35) sont de même signe.

Envisageons encore l'expression

$$(38)\qquad H_i = \frac{\frac{1}{2}\left|Q_{n+1}\left(\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\right)\right|}{\sqrt{|Q'_{n+1}(\theta_i)\cdot Q'_{n+1}(\theta_{i+1})|}} =$$

$$= \frac{\sin^2\frac{\delta_i}{2}\sin\left(\frac{\delta_i}{2}+\delta_{i+1}\right)\sin\left(\frac{\delta_i}{2}+\delta_{i-1}\right)\cdots}{\sin\delta_i\sqrt{\sin\delta_{i+1}\sin\delta_{i-1}\sin(\delta_i+\delta_{i+1})\sin(\delta_i+\delta_{i-1})\cdots}},$$

en posant

$$\theta_{2n+1} = 2\pi, \qquad \delta_k = \frac{\theta_{k+1}-\theta_k}{2},$$

pour $0 \leqslant k \leqslant 2n$, et $\delta_{k\pm(2n+1)} = \delta_k$, de sorte que $\sum_{k=0}^{n}\delta_{i+k} = \pi$.

On a donc

$$(39)\qquad H_i = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta_i}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\delta_i}{2}+\delta_{i+1}\right)}{\sqrt{\sin\delta_{i+1}\sin(\delta_i+\delta_{1+1})}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sin\left(\frac{\delta_i}{2}+\delta_{i-1}\right)}{\sqrt{\sin\delta_{i-1}\sin(\delta_i+\delta_{i-1})}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\delta_i}{2}+\delta_{i+1}+\delta_{i+2}\right)}{\sqrt{\sin(\delta_{i+1}+\delta_{i+2})\sin(\delta_i+\delta_{i+1}+\delta_{i+2})}}\cdots$$

Or, en supposant, comme nous le pouvons, que

$\frac{\delta_i}{2}+\delta_{i+1}+\ldots+\delta_{i+h} \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\frac{\delta_i}{2}+\delta_{i-1}+\ldots+\delta_{i-k} \leqslant \frac{\pi}{2}$, nous avons

$$(40)\qquad \frac{\sin\left(\frac{\delta_i}{2}+\delta_{i+1}+\ldots+\delta_{i+h}\right)}{\sqrt{\sin(\delta_{i+1}+\ldots+\delta_{i+h})\sin(\delta_i+\ldots+\delta_{i+h})}} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\delta_i}{2}+\delta_{i+1}+\ldots+\delta_{i+h}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}[\cos\delta_i-\cos(\delta_i+2\delta_{i+1}+\ldots+2\delta_{i+h})]}} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\delta_i}{2}+\delta_{i+1}+\ldots+\delta_{i+h}\right)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\delta_i}{2}+\delta_{i+1}+\ldots+\delta_{i+h}\right)-\sin^2\frac{\delta_i}{2}}} >$$

$$> \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\delta_i^2}{(\delta_i+2\delta_{i+1}+\ldots+2\delta_{i+h})}}},$$

car on a

$$\frac{\sin x}{\sin(x+b)} > \frac{x}{x+b},$$

si

$$x > 0,\ b > 0,\ x+b \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent, on a

(41) $$H_i > I_i,$$

où

(42) $$I_i = \frac{\delta_i}{4}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{\delta_i^2}{(\delta_i+2\delta_{i+1})^2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{1-\frac{\delta_i^2}{(\delta_i+2\delta_{i-1})^2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{1-\frac{\delta_i^2}{(\delta_i+2\delta_{i+1}+2\delta_{i+2})^2}}}\cdots;$$

Remarquons que I_i considérée, comme fonction de δ_i est croissante et est, au contraire, décroissante par rapport à δ_h, si $h \gtrless i$.

En effet, on a

(43) $$\frac{\partial \log I_i}{\partial \delta_i} = \frac{1}{\delta_i} + \sum_k \frac{1}{1-\frac{\delta_i^2}{(\delta_i+2b_k)^2}}\cdot\frac{2b_k\delta_i}{(\delta_i+2b_k)^3} > 0,$$

où

$$b_k = \frac{\delta_i}{2} + \delta_{i\pm 1} + \ldots + \delta_k;$$

d'autre part, chacun des facteurs dépendant de δ_h décroît, évidement, lorsque δ_h augmente.

Montrons de plus que I_i est convexe par rapport à tous les δ, c'est-à-dire, que l'on a $\frac{\partial^2 I_i}{\partial \delta_k^2} > 0$, quel que soit k.

Soit, d'abord $k = i$. On a, d'après (43),

$$\frac{\partial \log I_i}{\partial \delta_i^2} = \frac{1}{\delta_i} + \sum_k \left[\frac{1}{\delta_i+2b_k} - \frac{1}{2\delta_i+2b_k}\right];$$

donc,

$$(44)\qquad \frac{\partial^2 I_i}{\partial \delta_i^2} = I_i\left[\left(\frac{\partial \log I_i}{\partial \delta_i}\right)^2 + \frac{\partial^2 \log I_i}{\partial \delta_i^2}\right] =$$

$$= I_i\left\{\left[\frac{1}{\delta_i} + \frac{1}{2}\sum_k\left(\frac{\delta_i}{(\delta_i+2b_k)(\delta_i+b_k)}\right)\right]^2 - \frac{1}{\delta_i^2} +\right.$$

$$\left. + \sum_k\left[\frac{1}{2(\delta_i+b_k)^2} - \frac{1}{(\delta_i+2b_k)^2}\right]\right\} = I_i\left[\sum_k \frac{3}{4(\delta_i+b_k)^2} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{k<k_1}\sum \frac{\delta_i^2}{(\delta_i+b_k)(\delta_i+2b_k)(\delta_i+b_{k1})(\delta_i+2b_{k1})}\right] > 0.$$

On vérifie aussi immédiatement que la dérivée seconde par rapport à δ_k de chaque facteur de I_i contenant δ_k (où $k \gtrless i$) est également positive; donc, on a aussi $\frac{\partial^2 I_i}{\partial \delta_k^2} > 0$.

Il en résulte que

$$I_i\left(\frac{\delta_0+\delta_0'}{2}, \frac{\delta_1+\delta_1'}{2}, \ldots\right) < \frac{1}{2}[I_i(\delta_0, \delta_1, \ldots) + I_i(\delta_0', \delta_1', \ldots)].$$

Donc, toute fonction symétrique de $I_0, I_1, \ldots, I_{2n}$ à derivées successive non négatives atteindra son minimum pour

$$(45)\qquad \delta_0 = \delta_1 = \ldots \delta_{2n} = \frac{\pi}{2n+1},$$

car, si des valeurs différentes entre elles $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{2n}$ donnaient le minimum, il en serait de même de $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_{2n}, \delta_0$ de sorte que

$$\frac{\delta_0+\delta_1}{2}, \ldots, \frac{\delta_{2n}+\delta_0}{2}$$

fourniraient, d'après (45), une valeur moindre, ce qui conduit à une contradiction.

Je remarquerai que l'on pourrait vérifier également que

$$(46)\qquad \frac{\partial^2 H_i}{\partial \delta_k^2} > 0,$$

quels que soient i et k, mais, les calculs étant plus longs, il est inutile de les reproduire ici, puisque la considération de I_i au lieu de H_i suffit pour $n \longrightarrow \infty$.

D'ailleurs,

$$\min I_i \sim \min H_i = \frac{1}{2n+1}$$

car pour

$$\delta_i = \frac{\pi}{2n+1},$$

on a

$$Q_{n+1}(\theta) = \sin \frac{2n+1}{2}\theta.$$

Nous pouvons observer seulement, par exemple, sans que nous ayons à utiliser ce résultat dans la suite, que la somme

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2n} \frac{\left|Q_{n+1}\left(\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\right)\right|}{\sqrt{|Q'_{n+1}(\theta_i)\cdot Q'_{n+1}(\theta_{i+1})|}}$$

ne peut devenir inférieure à 1 pour aucun polynôme

$$Q_{n+1}(\theta) = \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta-\theta_1}{2} \dots \sin\frac{\theta-\theta_{2n}}{2},$$

quel que soit n.

Dans la suite nous supposerons donc toujours que n croît infiniment.

Envisageons la somme

$$S_\alpha = \frac{1}{2}\sum_\alpha \frac{\left|Q_{n+1}\left(\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\right)\right|}{\sqrt{|Q'_{n+1}(\theta_i)\, Q'_{n+1}(\theta_{i+1})|}}, \tag{47}$$

où la somme considérée n'est étendue qu'aux valeurs θ_i d'un certain intervalle α de grandeur $\alpha = \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}$ où $\varepsilon < 1$ est un nombre positif donné, aussi petit qu'on veut.

D'après (41), on a

$$S_\alpha > \Sigma_\alpha I_i$$

où la sommation se rapporte au même intervalle α. On aura a fortiori

$$S_\alpha > \Sigma_\alpha I_{i,p} \tag{48}$$

si l'on designe par $I_{i,p}$ l'expression que l'on déduit de I_i en y conservant seulement les $2p+1$ premiers facteurs, puisque les facteurs rejétés sont supérieurs à 1.

Soit $l+1$ le nombre de racines θ_i contenues dans l'intervalle α, et soient $2\delta_1$, $2\delta_2, \ldots, 2\delta_l$ leurs distances successives; nous supposerons $l > 2p$, et nous conviendrons de modifier ceux des termes $I_{i,p}$ (voisins des extrémités de l'intervalle α) qui contiennent $\delta_{l+1}, \delta_{l+2}, \ldots, \delta_{l+p}$ ou $\delta_0, \delta_{-1}, \ldots \delta_{1-p}$ par $I'_{i,p}$ de telle sorte que

$$\delta_0 = \delta_e, \delta_{-1} = \delta_{l-1}, \ldots, \delta_{-p+1} = \delta_{l-p+1},$$
$$\delta_{l+1} = \delta_1, \delta_{l+2} = \delta_2, \ldots, \delta_{l+p} = \delta_p.$$

La somme $\Sigma_\alpha I_{i,p}$ se trouvera ainsi transformée en une somme

(50) $$T_\alpha = \Sigma_\alpha I_{i,p},$$

dont les termes successifs s'obtiennent par une permutation cyclique des indices, et par conséquent, sera symétrique par rapport à $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_l$. Donc, en vertu de (45), le minimum de T_α sera atteint pour

$$\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_l = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_l}{l} \sim \frac{\alpha}{2l}$$

car, on a, d'après (28)

$$\frac{1}{2}\alpha - (\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n) = 0\left(\frac{\log\log n}{n}\right).$$

Or, en posant $\delta = \delta_1 = \delta_2 = \ldots \delta_l$, on a

(51) $$I'_{i,p} = \frac{\delta}{4} \cdot \frac{(3.5 \ldots 2p+1)^2}{(2.4 \ldots 2p)^2\, p+1} > \frac{2p+1}{p+1} \cdot \frac{\delta}{2\pi};$$

donc

(52) $$T_\alpha > \frac{2p+1}{p+1} \cdot \frac{l\delta}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi}\left[1 + 0\left(\frac{\log\log n}{n^\varepsilon} + \frac{1}{p}\right)\right] \sim \frac{\alpha}{2\pi}.$$

Puisque, l devant croître infiniment avec n, on peut aussi faire p aussi grand qu'on veut.

Il nous reste encore à évaluer l'ordre de grandeur de la différence

$$T_\alpha - \Sigma_\alpha I_{i,p} = \Sigma_\alpha [I'_{i,p} - I_{i,p}],$$

qui contient $2p$ termes non nuls, dont chacun est inférieur à

$$\frac{\rho}{4}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{\rho}{\rho+2\mu}\right)^2}\right]^p = \frac{\rho}{4}\left[1+\frac{\rho^2}{4\mu(\rho+\mu)}\right]^p,$$

si $\delta_k \leqslant \rho$, $\delta_k \geqslant \mu$. Nous savons déjà que l'on peut prendre

$$\rho = 0\left(\frac{\log\log n}{n}\right).$$

Mais, d'autre part, si un polynôme trigonométrique $S_n(\theta)$ prend les valeurs $+1$ et -1 en deux points à distance λ, on a pour une certaine valeur de θ,

$$|S_n'(\theta)| > \frac{2}{\lambda}$$

et, par conséquent, il y aura des valeurs de θ, telles que

$$|S_n(\theta)| > \frac{2}{\lambda n}.$$

Nous ne devons donc considérer que les distributions des noeuds θ_i, elles que

$$\frac{2}{\lambda n} = 0(\log n)$$

par conséquent, on peut poser

$$\frac{1}{\mu} = 0(n \log n). \tag{53}$$

Ainsi, finalement, en posant $p = \log\log n$, on a

$$T_\alpha - \Sigma_\alpha I_{i,p} < \frac{p\rho}{2}\left[1+\frac{\rho}{4\mu}\right]^p = 0\left[\frac{p\log\log n}{n}(1+0(\log n)^2)^p\right] = \tag{54}$$

$$= 0\left[\frac{p^2}{n}(\log n)^{2p}\right] = 0\left[\frac{(\log n)^{2p+1}}{n}\right] = 0\left(\frac{1}{n^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}\right),$$

d'où résulte, à causse de (52) et (48), l'inégalité asymptotique essentielle

$$S_\alpha \gtrsim \frac{\alpha}{2\pi}. \tag{55}$$

Soit à présent φ une valeur de θ, pour laquelle $|Q_{n+1}(\theta)|$ atteint son maximum absolu. Considérons

$$(37 \text{ bis}) \qquad F_n(\varphi) = \left|\frac{Q_{n+1}(\varphi)}{2}\right| \sum_0^{2n} \frac{1}{\left|\sin\frac{\varphi-\theta_i}{2} Q'_{n+1}(\theta_i)\right|}.$$

A partir de φ à droite et à gauche, prenons $\frac{m}{2}$ intervalles successifs de grandeur

$$\alpha = \frac{1}{n^{1-\varepsilon}} = \frac{2\pi}{m};$$

la partie de $F_n(\varphi)$, correspondant aux valeurs de θ_i de l'intervalle $(k\alpha, (k+1)\alpha)$ sera supérieure, pour $k \geqslant 0$, à

$$(56) \qquad \frac{1}{4\sin\frac{k+1}{2}\alpha} \sum_\alpha \left[\left|\frac{Q_{n+1}\left(\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\right)}{Q'_{n+1}(\theta_i)}\right| + \left|\frac{Q_{n+1}\left(\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\right)}{Q'_{n+1}(\theta_{i+1})}\right|\right] >$$

$$> \frac{1}{2\sin\frac{k+1}{2}\alpha} \sum_\alpha \frac{\left|Q_{n+1}\left(\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\right)\right|}{\sqrt{|Q'_{n+1}(\theta_i)\, Q'_{n+1}(\theta_{i+1})|}} = \frac{S_\alpha}{\sin\frac{k+1}{2}\alpha} \gtrsim \frac{\alpha}{2\pi\sin\frac{k+1}{2}\alpha}.$$

Donc, en appliquant la même inégalité aux intervalles $(-k\alpha, -(k+1)\alpha)$, on a

$$(57) \qquad F_n(\varphi) \gtrsim \frac{\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\alpha} + \ldots + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\right] \sim \frac{1}{\pi}\int_\alpha^\pi \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\log\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4} \sim \frac{2}{\pi}\log\frac{1}{\alpha} = \frac{2(1-\varepsilon)}{\pi}\log n,$$

et puisque ε peut être pris aussi petit que l'on veut, on obtient enfin

$$(58) \qquad F_n(\varphi) \gtrsim \frac{2}{\pi}\log n$$

c.q.f.d.

Corollaire. *Si le module du polynôme $P_{2n}(z)$ de degré $2n$ atteint la valeur 1 en $2n+1$ points $z_0, z_1, \ldots, z_{2n}$ de la circonférence c, il pourra at-*

teindre asymptotiquement la valeur $\frac{2}{\pi}\log n$ *sur cette circonférence, quels que soient les points donnés* $z_0, z_1, \ldots z_{2n}$.

En effet, soit

$$A_{2n+1}(z) = (z - z_0) \ldots (z - z_{2n});$$

le polynôme $P_{2n}(z)$, réalisant le module maximum au point z, aura pour valeur en ce point

$$P_{2n}(z) = A_{2n+1}(z) \sum_{k=0}^{2n} \left| \frac{1}{(z - z_k) A'_{2n+1}(z_k)} \right|.$$

Donc, en posant $z_k = e^{i\theta_k}$, $z = e^{i\varphi}$

$$|P_{2n}(e^{i\varphi})| = \left| \sin\frac{\varphi - \theta_0}{2} \sin\frac{\varphi - \theta_1}{2} \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \sin\frac{\varphi - \theta_{2n}}{2} \right| \sum_0^{2n} \frac{1}{\left| \sin\frac{\varphi - \theta_k}{2} \cdot \sin\frac{\theta_k - \theta_0}{2} \ldots \sin\frac{\theta_k - \theta_{2n}}{2} \right|}$$

qui est identique à l'expression (37 bis).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ОБОБЩЕНИЕ СПОСОБА JACOBI ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПОЛНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ. ОБОБЩЕНИЕ СООТВЕТСТВУЮЩИХ ИССЛЕДОВАНИЙ CLEBSCH'А

Г. В. ПФЕЙФФЕРА

(*Представлено академиком* **А. Н. Крыловым**)

Введение

В ряде своих работ A. Weiler * утверждал, что при интегрировании полной системы линейных однородных уравнений нет надобности переходить к инволюционной системе, как это делает Jacobi. Мысль совершенно верная, но убедительного доказательства ее Weiler дать не мог. Работы Weiler'а запутаны, в них много промахов. Ему указывали на неясность изложения, на неправильность заключений... Он спорил, иногда соглашался, что неправ, вновь излагал свои идеи и вновь допускал неточности. При этом Weiler вел неприятную полемику и достиг того, что его верная мысль не вошла в жизнь, между тем как способ Jacobi стал общепринятым.

В «Leçons sur le problème de Pfaff» Ed. Goursat ** отметил интересную задачу A. Buhl'я.*** С нею связано много блестящих имен: P. Appell,

* Работы A. Weiler'а. Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit $n+1$ Veränderlichen. Ztschr. f. Math. u. Physik, 1863, B. 8, SS. 264—292; Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung von unbeschränkter Allgemeinheit Ibid., 1875, B. 20, SS. 271—299; Nachträge zu meinen Abhandlungen über Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Ibid., 1877, B. 22, SS. 100—125; Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Ibid., 1894, B. 39, SS. 355—375.

** Ed. Goursat. Leçons sur le problème de Pfaff. Paris, 1922, p. 234.

*** A. Buhl. Sur les formes linéaires aux dérivées partielles d'une intégrale d'un système d'équations différentielles simultannées, qui sont aussi les intégrales de ce systhème. C. R., 1901, t. 132, p. 313; id.: Sur les équations différentielles simultannées et la forme aux dérivées partielles adjointe. Thèse, Gauthier-Villars, Paris, 1901; id.: Sur la permutation des intégrales d'un système d'équations différentielles. C. R., 1907, t. 145, p. 1134; id.: Sur les opérateurs différentiels permutables ou non. Bull. des sc. math., 1928, série 2, t. LII, pp. 353—361; id.: Aperçus modernes sur la théorie des groupes continus et finis. Mémorial des sci. math., fasc. XXXIII, Paris, 1928.

Th. De Donder, Ed. Goursat, S. Lie — Fr. Engel, S. Lie — G. Scheffers, H. Poincaré, C. Popovici, N. Saltykow. Наши исследования 1922 г. оказались близкими к этой задаче, и мы опубликовали три статьи: одну в Bulletin des sciences mathématiques, другую в Докладах Академии Наук СССР, и третью в Actes du Congrès Intern., Bologne, 1928.* Теоремы второй статьи дали возможность обобщить способ Jacobi интегрирования полных систем линейных однородных уровнений ** и соответствующие исследования A. Clebsch'a.*** Мы пришли к заключению, что интегрирование полных систем не требует перехода к инволюционным системам; можно пользоваться более общими системами, которые предлагаем называть системами последовательных полных систем. Ряд других заключений также находится в настоящей статье.

§ 1. О дифференциальных операторах полных систем линейных однородных уравнений с частными производными первого порядка одной неизвестной функции

Возьмем полную систему двух линейных однородных уравнений:

$$X(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \tag{1}$$

$$Y(f) = \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \eta_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \tag{2}$$

удовлетворяющих условию:

$$XY(f) - YX(f) \equiv \lambda X(f) + \mu Y(f),$$
$$\lambda \not\equiv 0, \quad \mu \not\equiv 0. \tag{3}$$

* G. Pfeiffer. Sur la permutation des solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre. Bull. sc. math, 1928, série 2, t. LII, pp. 350—352; id.: Теоремы, выясняющие ряд вопросов в задаче о перестановке решений линейного уравнения с частными производными первого порядка. ДАН-А, 1929, стр. 177—182; id.: Quelques additions au problème de M. Buhl. Atti del Congr. Intern. dei Matem., Bologna, 1928, t. III, pp. 45—46.

** Г. Пфейффер. Обобщение способа Jacobi интегрирования полных систем линейных однородных уравнений. ДАН-А, 1930, стр. 405—409.

*** A. Clebsch. Über die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen Journ. für die reine u. ang. Math., 1866, B. 65, SS. 257—268. — G. Pfeiffer. Sur les opérateurs d'un système complet d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue. C. R., t. 190, 1930, pp. 909—911.

Уравнения (1), (2) обладают $(n-2)$-мя совместными независимыми интегралами:

$$u_1, u_2, \ldots u_{n-2}. \tag{4}$$

Уравнению (1) принадлежит $(n-1)$ независимых интегралов. Если к интегралам (4) присоединим интеграл уравнения (1) — u_0, не удовлетворяющий уравнению (2), то получим систему $(n-1)$ независимых интегралов уравнения (1):

$$u_0, u_1, u_2, \ldots u_{n-2}. \tag{5}$$

Любая система независимых интегралов уравнения (1) имеет вид:

$$v_0 = \varphi_0(u_0, u_1, \ldots u_{n-2}),$$
$$v_1 = \varphi_1(u_0, u_1, \ldots u_{n-2}), \ldots v_{n-2} = \varphi_{n-2}(u_0, u_1, \ldots u_{n-2}). \tag{6}$$

Те из интегралов v_i — (6), для которых:

$$\frac{\partial v_i}{\partial u_0} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_0} \equiv 0, \tag{7}$$

— совместные интегралы уравнений (1), (2).

Среди интегралов (6) по крайней мере один не принадлежит уравнению (2), но могут и все не быть совместными интегралами уравнений (1), (2).

Разобьем интегралы (6) на две категории: к первой отнесем интегралы, принадлежащие только уравнению (1):

a)
$$\varphi_0 = \omega_0(u_0, u_1, \ldots u_{n-2}),$$
$$\varphi_1 = \omega_1(u_0, u_1, \ldots u_{n-2}), \ldots \varphi_i = \omega_i(u_0, u_1, \ldots u_{n-2}) \tag{8}$$

$$\frac{\partial \omega_\nu}{\partial u_0} \not\equiv 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots i, \tag{9}$$

ко второй — совместные интегралы уравнений (1), (2):

b)
$$\psi_{i+1} = \bar{\omega}_{i+1}(u_1, u_2, \ldots u_{n-2}),$$
$$\psi_{i+2} = \bar{\omega}_{i+2}(u_1, u_2, \ldots u_{n-2}), \ldots \psi_{n-2} = \bar{\omega}_{n-2}(u_1, u_2, \ldots u_{n-2}). \tag{10}$$

Если подставим интеграл ψ, один из интегралов (b) — (10), в тождество (3), то члены последнего, каждый в отдельности, обратятся в нули;

если подставим интеграл φ, один из интегралов (a) — (8), — придем к тождеству:

$$XY(\varphi) \equiv \mu\, Y(\varphi), \tag{11}$$

$$X \log \sigma \equiv -\mu, \tag{12}$$

$$\sigma = \frac{1}{Y(\varphi)}. \tag{13}$$

На основании полученных нами результатов,* система уравнений:

$$X(f) = 0, \quad Z(f) = \sigma\, Y(f) = 0 \tag{14}$$

обладает свойством:

$$XZ(f) - ZX(f) \equiv l\, X(f), \tag{15}$$
$$l = \sigma\lambda \neq 0.$$

Подстановка в строку (15) интеграла φ', одного из интегралов (a) — (8) отличного от интеграла φ, дает тождество:

$$X\big(Z(\varphi')\big) \equiv 0. \tag{16}$$

Последнее показывает, что выражение:

$$Z(\varphi') = \sigma\, Y(\varphi') = \frac{Y(\varphi')}{Y(\varphi)} \tag{17}$$

— интеграл уравнения (1).

Отсюда вытекает, что есть возможность по двум интегралам φ, φ' уравнения (1), не обращающим уравнения (2) в тождество, строить третий интеграл v — (6) уравнения (1):

$$v = \frac{Y(\varphi')}{Y(\varphi)}. \tag{18}$$

Бесконечно малое преобразование:

$$Z(f) = \sigma\, Y(f) = \frac{1}{Y(\varphi)}\, Y(f) \tag{19}$$

— дифференциальный оператор уравнения (1), переводящий интегралы $(a$ — 8) уравнения (1) в его же интегралы v — (6).

* Г. Пфейффер. Теоремы, выясняющие ряд вопросов в задаче о перестановке решений линейного уравнения с частными производными первого порядка. ДАН-А, 1929, стр. 177—182.

Если бы в соотношении (3) μ было нулем, то нам не пришлось бы переходить к соотношению (15). Мы имели бы тождество:

$$X(Y(\varphi)) \equiv 0; \tag{20}$$

интеграл φ давал бы интеграл v' — (6) уравнения (1):

$$v' = Y(\varphi). \tag{21}$$

Но, одновременно с (21), выражение (18) было бы тоже интегралом уравнения (1).

Бесконечно малые преобразования:

$$\overline{Z}(f) = Y(f), \quad Z(f) = \frac{1}{Y(\varphi)} Y(f) \tag{22}$$

представляли бы дифференциальные операторы уравнения (1), переводящие интегралы (a) — (8) уравнения (1) в его интегралы v — (6).

Отметим следующее обстоятельство: дифференциальный оператор, переводящий интегралы (a) — (8) уравнения (1) в интегралы v — (6), остается дифференциальным оператором и в том случае, если умножить его или разделить на интеграл уравнения (1). При $\mu \equiv 0$, $Y(\varphi)$ — интеграл уравнения (1); разделив первый оператор (22) на $Y(\varphi)$, найдем второй.

По интегралам φ — (8) находим соответствующие σ — (13):

$$\sigma_0 = \frac{1}{Y(\varphi_0)} = \frac{1}{\frac{\partial \omega_0}{\partial u_0} Y(u_0)},$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{Y(\varphi_1)} = \frac{1}{\frac{\partial \omega_1}{\partial u_0} Y(u_0)}, \ldots \sigma_i = \frac{1}{Y(\varphi_i)} = \frac{1}{\frac{\partial \omega_i}{\partial u_0} Y(u_0)} \tag{23}$$

и соответствующие операторы (19):

$$Z_0(f) = \sigma_0 Y(f), \; Z_1(f) = \sigma_1 Y(f), \; \ldots \; Z_1(f) = \sigma_i Y(f). \tag{24}$$

Когда $\mu \equiv 0$, к операторам (24) можно присоединить оператор:

$$Y(f). \tag{25}$$

Умножив операторы (24) на произвольные постоянные или функции интегралов (6):

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_i \tag{26}$$

и сложив их, получим оператор:

$$\overline{\overline{Z}}(f) = \varepsilon_0 Z_0(f) + \varepsilon_1 Z_1(f) + \ldots + \varepsilon_i Z_i(f) =$$

$$= (\varepsilon_0 \sigma_0 + \varepsilon_1 \sigma_1 + \ldots + \varepsilon_i \sigma_i) Y(f) = \left(\frac{\varepsilon_0}{\frac{\partial \omega_0}{\partial u_0}} + \frac{\varepsilon_1}{\frac{\partial \omega_1}{\partial u_0}} + \ldots + \frac{\varepsilon_i}{\frac{\partial \omega_i}{\partial u_0}} \right) \frac{Y(f)}{Y(u_0)}. \tag{27}$$

Отношение двух σ — (23):

$$\frac{\sigma_\pi}{\sigma_\rho} = \frac{Y(\varphi_\rho)}{Y(\varphi_\pi)} = \frac{\frac{\partial \omega_\rho}{\partial u_0}}{\frac{\partial \omega_\pi}{\partial u_0}} = Z_\pi(\varphi_\rho) \tag{28}$$

— интеграл уравнения (1).

Отсюда вытекает, что все операторы (24) получаются из одного умножением на интеграл уравнения (1).

Возьмем два интеграла уравнения (1):

$$\left. \begin{aligned} &\Phi(\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_i, \psi_{i+1}, \ldots \psi_{n-2}), \\ &\Psi(\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_i, \psi_{i+1}, \ldots \psi_{n-2}), \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

не удовлетворяющие уравнению (2):

$$\left. \begin{aligned} Y(\Phi) &= \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_0} Y(\varphi_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} Y(\varphi_1) + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i} Y(\varphi_i) \not\equiv 0, \\ Y(\Psi) &= \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_0} Y(\varphi_0) + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_1} Y(\varphi_1) + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_i} Y(\varphi_i) \not\equiv 0, \end{aligned} \right\} \tag{30}$$

Φ, Ψ — произвольные, определенно взятые функции аргументов.

Отношение выражений (30):

$$\frac{Y(\Phi)}{Y(\Psi)} = \frac{\frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_0} + \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} + \ldots + \frac{1}{\sigma_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i}}{\frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_0} + \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_1} + \ldots + \frac{1}{\sigma_i} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_i}} \tag{31}$$

— интеграл уравнения (1).

Интеграл (28) удовлетворяет уравнению (2), если:

$$\frac{\partial\omega_\rho}{\partial u_0} = \frac{\partial\omega_\pi}{\partial u_0}\Phi(u_1, u_2, \ldots u_{n-2}), \tag{32}$$

$$\omega_\rho = \omega_\pi\Phi(u_1, u_2, \ldots u_{n-2}) + \Psi(u_1, u_2, \ldots u_{n-2}), \tag{33}$$

Φ, Ψ — любые функции своих аргументов.*

В частном случае интеграл (28) может быть постоянной величиной K, тогда:

$$\omega_\rho = K\omega_\pi + \Psi(u_1, u_2, \ldots u_{n-2}). \tag{34}$$

Для:

$$\begin{gathered}\varphi' = \varphi + \Psi,\\ K = 1, \quad \Psi = \Psi(u_1, u_2, \ldots u_{n-2})\end{gathered} \tag{35}$$

равенство (17) дает единицу:

$$Z(\varphi) = \frac{Y(\varphi)}{Y(\varphi)} = 1. \tag{36}$$

Применив к каждому из интегралов (a) — (8) ($i+1$) — их оператор (24), составим ($i+1$)-ну, эквивалентную одна другой, группу интегралов (28) уравнения (1):

$$\left.\begin{array}{llll} Z_0(\varphi_0) = 1, & Z_1(\varphi_0) = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}, & Z_2(\varphi_0) = \frac{\sigma_2}{\sigma_0}, \ \ldots & Z_i(\varphi_0) = \frac{\sigma_i}{\sigma_0};\\ Z_0(\varphi_1) = \frac{\sigma_0}{\sigma_1}, & Z_1(\varphi_1) = 1, & Z_2(\varphi_1) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \ \ldots & Z_i(\varphi_1) = \frac{\sigma_i}{\sigma_1};\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ Z_0(\varphi_i) = \frac{\sigma_0}{\sigma_i}, & Z_1(\varphi_i) = \frac{\sigma_1}{\sigma_i}, & Z_2(\varphi_i) = \frac{\sigma_2}{\sigma_i}, \ \ldots & Z_i(\varphi_i) = 1. \end{array}\right\} \tag{37}$$

* Отношение:

$$\frac{\partial\omega_\rho}{\partial u_0}\Big|\frac{\partial\omega_\pi}{\partial u_0}$$

функция аргументов $u_0, u_1, \ldots u_{n-2}$. Если оно удовлетворяет уравнению (2), то не зависит от u_0, и, следовательно:

$$\frac{\partial\omega_\rho}{\partial u_0}\Big|\frac{\partial\omega_\pi}{\partial u_0} = \Phi(u_1, u_2, \ldots u_{n-2}),$$

$$\frac{\partial^2\omega_\rho}{\partial u_0^2}\frac{\partial\omega_\pi}{\partial u_0} - \frac{\partial^2\omega_\pi}{\partial u_0^2}\frac{\partial\omega_\rho}{\partial u_0} \equiv 0.$$

В строках (32) (33) функции Φ, Ψ, будучи интегралами уравнения (1), в то же время — интегралы уравнения (2).

Интегралы:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\sigma_0}{\sigma_\nu},\ \dfrac{\sigma_1}{\sigma_\nu},\ \ldots\ \dfrac{\sigma_{\nu-1}}{\sigma_\nu},\ 1,\ \dfrac{\sigma_{\nu+1}}{\sigma_\nu},\ \ldots\ \dfrac{\sigma_i}{\sigma_\nu},\\ \nu \text{ — одно из чисел } 0,\ 1,\ \ldots\ i,\end{array}\right\} \tag{38}$$

могут быть также получены помощью оператора (27):

$$\overline{\overline{Z}}(\varphi_\nu) = \varepsilon_0\frac{\sigma_0}{\sigma_\nu} + \varepsilon_1\frac{\sigma_1}{\sigma_\nu} + \ldots + \varepsilon_{\nu-1}\frac{\sigma_{\nu-1}}{\sigma_\nu} + \varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1}\frac{\sigma_{\nu+1}}{\sigma_\nu} + \ldots + \varepsilon_i\frac{\sigma_i}{\sigma_\nu},$$

$$\nu \text{ — одно из чисел } 0,\ 1,\ \ldots\ i.$$

Подвергнув интегралы (a) — (8) действию любого оператора (24):

$$\left.\begin{array}{c} Z_j(f) = \sigma_j\, Y(f)\\ j \text{ — одно из чисел } 0,\ 1,\ \ldots\ i,\end{array}\right\} \tag{39}$$

найдем соответствующую — $(j+1)$-ю колонну интегралов (37):

$$Z_j(\varphi_0) = \frac{\sigma_i}{\sigma_0},\ Z_j(\varphi_1) = \frac{\sigma_i}{\sigma_1},\ \ldots\ Z_j(\varphi_i) = \frac{\sigma_j}{\sigma_i}. \tag{40}$$

В том случае, когда интегралы:

$$\varphi,\ \varphi',\ \varphi'',\ \ldots \tag{41}$$

категории (a) — (8) связаны соотношениями:

$$\varphi' = Z_j(\varphi),\ \varphi'' = Z_j(\varphi'),\ \ldots, \tag{42}$$

имеет место процесс Jacobi, выражаемый строкою:

$$\varphi,\ \varphi' = Z_j(\varphi),\ \varphi'' = Z_j(\varphi'),\ \ldots \tag{43}$$

Он состоит в последовательном применении одного и того же оператора к интегралу φ категории (a) — (8).

После того, как установлены способы построения дифференциальных операторов, обладающих свойством, отмеченным Poisson'ом,* обобщение способа Jacobi становится очевидным. Ничего больше не остается, как обратиться к одному из лучших учебников, напр., к лекциям Ed. Goursat.**

* Encyklopädie der math. Wissenschaften etc. B. II, 1, Heft 2/3, S. 335.

** Ed. Goursat. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris, 1921, pp. 77—81.

Все, что сказано относительно уравнения (1), само собою разумеется, может быть применено к уравнению (2).

§ 2. Системы последовательных полных систем*

Установим те полные системы линейных однородных уравнений с частными производными первого порядка одной неизвестной функции, при числе уравнений больше двух, на которые непосредственно обобщаются результаты предшествующего параграфа. Мы отметим свойства полных систем, которые могут быть проинтегрированы обобщенным способом Jacobi, и предложим их называть системами последовательных полных систем.

Положим, что дана полная система $q\,(q > 2)$ линейных однородных уравнений:

$$X_1(f) = 0,\ X_2(f) = 0,\ \ldots\ X_{q-1}(f) = 0, \tag{44}$$

$$X_q(f) = Y(f) = 0, \tag{45}$$

символы $X_q(\ \ )$, $Y(\ \ )$ тождественны.

Допустим, что уравнения (44) представляют также полную систему, тогда для полной системы (44), (45) выполняются условия:

$$X_i X_k(f) - X_k X_i(f) \equiv \sum_{j=1}^{q-1} r_{ik}^{j} X_j(f) \tag{46}$$

$$i, k = 1, 2, \ldots (q-1);\quad i \neq k,$$

в силу которых система (44) полная, и условия:

$$\left.\begin{aligned} X_1 Y(f) - Y X_1(f) &\equiv \sum_{h=1}^{q-1} \lambda_1^{h} X_2(f) + \mu_1 Y(f), \\ X_2 Y(f) - Y X_2(f) &\equiv \sum_{h=1}^{q-1} \lambda_2^{h} X_h(f) + \mu_2 Y(f), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{q-1} Y(f) - Y X_{q-1}(f) &\equiv \sum_{h=1}^{q-1} \lambda_{q-1}^{h} X_h(f) + \mu_{q-1} Y(f). \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

* Г. Пфейффер. Обобщение способа Jacobi интегрирования полных систем линейных однородных уравнений. ДАН-А, 1930, стр, 405—409.

Отметим важное обстоятельство. Если уравнения (44), (45) умножим на некоторые множители:

$$\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{q-1}, \theta_q \tag{48}$$

— функции независимых переменных, то система:

$$Z_1(f)=\theta_1 X_1(f)=0, \ Z_2(f)=\theta_2 X_2(f)=0, \ \ldots Z_{q-1}(f)=\theta_{q-1} X_{q-1}(f)=0, \tag{49}$$

$$Z_q(f)=\theta_q X_q(f)=\theta_q Y(f)=0 \tag{50}$$

сохранит свойства (46), (47). В системе (49), (50) будет заключатся полная система (49).

Уравнения (44), (45) обладают $(n-q)$ совместными независимыми интегралами:

$$u_1, u_2, \ldots u_{n-q}. \tag{51}$$

Уравнениям (44) принадлежит $(n-q+1)$ совместных независимых интегралов:

$$u_0, u_1, u_2, \ldots u_{n-q}. \tag{52}$$

Интеграл u_0 системы (44) уравнению (45) не удовлетворяет.

Любая система $(n-q+1)$ независимых интегралов системы (44) имеет вид:

$$v_0=\varphi_0(u_0, u_1, \ldots u_{n-q}),$$

$$v_1=\varphi_1(u_0, u_1, \ldots u_{n-q}), \ldots v_{n-q}=\varphi_{n-q}(u_0, u_1, \ldots u_{n-q}). \tag{53}$$

Те из интегралов (53) — v_i, для которых:

$$\frac{\partial v_i}{\partial u_0}=\frac{\partial \varphi_i}{\partial \omega_0}\equiv 0 \tag{54}$$

— совместные интегралы уравнений (44), (45).

Среди интегралов (53) по крайней мере один не принадлежит уравнению (45), но могут и все не быть интегралами уравнения (45).

Разобьем интегралы (53) на две категории: в первую отнесем интегралы, принадлежащие только уравнениям (44):

a)
$$\varphi_0 = \omega_0(u_0, u_1, \ldots u_{n-q}),$$
$$\varphi_1 = \omega_1(u_0, u_1, \ldots u_{n-q}), \ldots \varphi_i = \omega_i(u_0, u_1, \ldots u_{n-q}), \qquad (55)$$
$$\frac{\partial\omega_\nu}{\partial u_0} \not\equiv 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots i, \qquad (56)$$

во вторую — интегралы, принадлежащие уравнениям (44) и уравнению (45):

b)
$$\psi_{i+1} = \tilde{\omega}_{i+1}(u_1, u_2, \ldots u_{n-q}),$$
$$\psi_{i+2} = \tilde{\omega}_{i+2}(u_1, u_2, \ldots u_{n-q}), \ldots \psi_{n-q} = \tilde{\omega}_{n-q}(u_1, u_2, \ldots u_{n-q}). \qquad (57)$$

Если интеграл ψ, один из интегралов (b) — (57), подставим в тождества (46), (47), то в последних все члены, каждый в отдельности, обратятся в нули; если же подставим интеграл φ, один из интегралов (a) — (55), то в соотношениях (46) все члены будут нулями, соотношения же (47) приведут к тождествам:

$$\left.\begin{array}{c} X_1 Y(\varphi) \equiv \mu_1 Y(\varphi), \\ X_2 Y(\varphi) \equiv \mu_2 Y(\varphi), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{q-1} Y(\varphi) \equiv \mu_{q-1} Y(\varphi), \end{array}\right\} \qquad (58)$$

что то же:

$$\left.\begin{array}{c} X_1 \log\sigma = -\mu_1, \\ X_2 \log\sigma = -\mu_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{q-1} \log\sigma = -\mu_{q-1}, \end{array}\right\} \qquad (59)$$

$$\sigma = \frac{1}{Y(\varphi)}. \qquad (60)$$

В силу установленных нами результатов,* система уравнений:

$$X_1(f) = 0,\ X_2(f) = 0,\ \ldots\ X_{q-1}(f) = 0,\ Z(f) = \sigma Y(f) = 0 \qquad (61)$$

* Г. Пфейффер. Теоремы, выясняющие ряд вопросов в задаче о перестановке решений линейного уравнения с частными производными первого порядка. ДАН-А, 1929, стр. 177—182.

обладает свойствами:

$$X_i X_k(f) - X_k X_i(f) \equiv \sum_{j=1}^{q-1} r_{ik}^{\;j} X_j(f); \qquad (62)$$
$$i, k = 1, 2, \dots (q-1); \quad i \neq k;$$

$$X_i Z(f) - Z X_i(f) \equiv \sum_{h=1}^{q-1} l_i^h X_h(f), \qquad (63)$$
$$i = 1, 2, \dots (q-1),$$
$$l_i^h = \sigma \lambda_i^h.$$

Подставив в соотношения (62), (63) интеграл φ', один из интегралов (a) — (53), отличный от интеграла φ, замечаем, что в строке (62) все члены отдельно обратятся в нули, строка же (63) дает тождества:

$$X_i(Z(\varphi')) \equiv 0, \qquad i = 1, 2, \dots (q-1). \qquad (64)$$

Последние показывают, что выражение:

$$Z(\varphi') = \sigma Y(\varphi') = \frac{Y(\varphi')}{Y(\varphi)} \qquad (65)$$

— интеграл системы (44).

Отсюда вытекает, что есть возможность по двум интегралам φ, φ' системы (44), не обращающим уравнения (45) в тождество, строить третий интеграл v — (53) системы (44), а также по интегралу φ системы (44) — ее оператор $Z(f)$:

$$v = \frac{Y(\varphi')}{Y(\varphi)}, \quad Z(f) = \frac{Y(f)}{Y(\varphi)}. \qquad (66)$$

И т. д.

Обобщение способа Jacobi очевидно.

Полные системы:

$$\text{(R)} \qquad X_1(f) = 0, \; X_2(f) = 0, \; \dots \; X_{q-1}(f) = 0, \; X_q(f) = 0, \qquad (67)$$

интегрируемые обобщенным способом Jacobi, должны обладать свойствами:

$$
(S)\begin{cases}
(s_1) & X_1X_2(f)-X_2X_1(f)\equiv\lambda'_{12}X_1(f)+\lambda^2_{12}X_2(f); & (68)\\
(s_2) & X_iX_3(f)-X_3X_i(f)\equiv\lambda'_{i3}X_1(f)+\lambda^2_{i3}X_2(f)+\lambda^3_{i3}X_3(f),\quad i=1,2; & (69)\\
(s_3) & X_iX_4(f)-X_4X_i(f)\equiv\lambda'_{i4}X_1(f)+\lambda^2_{i4}X_2(f)+\lambda^3_{i4}X_3(f)+\lambda^4_{i4}X_4(f),\quad i=1,2,3; & (70)\\
\cdots & \cdots & \\
(s_{q-2}) & X_iX_{q-1}(f)-X_{q-1}X_i(f)\equiv\lambda'_{i,q-1}X_1(f)+\lambda^2_{i,q-1}X_2(f)+\ldots+\lambda^{q-1}_{i,q-1}X_{q-1}(f),\quad i=1,2,\ldots(q-2); & (71)\\
(s_{q-1}) & X_iX_q(f)-X_qX_i(f)\equiv\lambda'_{iq}X_1(f)+\lambda^2_{iq}X_2(f)+\ldots+\lambda^q_{iq}X_q(f),\quad i=1,2,\ldots(q-1). & (72)
\end{cases}
$$

Мы предлагаем их называть системами последовательных полных систем.

При условиях (S) система (R)—(67) не только полная, но и система последовательных полных систем. Заключенные в ней системы:

$$(\mathrm{R}_1)\qquad X_1(f)=0,\ X_2(f)=0,\ \ldots\ X_{q-1}(f)=0; \qquad (73)$$

$$(\mathrm{R}_2)\qquad X_1(f)=0,\ X_2(f)=0,\ \ldots\ X_{q-2}(f)=0; \qquad (74)$$

. . . .

$$(\mathrm{R}_{q-3})\qquad X_1(f)=0,\ X_2(f)=0,\ X_3(f)=0; \qquad (75)$$

$$(\mathrm{R}_{q-2})\qquad X_1(f)=0,\ X_2(f)=0 \qquad (76)$$

— все полные.

Системы (R_1)—(73), (R_2)—(74), ... (R_{q-3})—(75), подобно системе (R)—(67), — системы последовательных полных систем. К каждой из них относятся заключения, к которым мы пришли, рассматривая систему (44), (45), обладающую свойствами (46), (47).

Если уравнения системы (R)—(67), обладающей свойством (S), умножим на множители (48), то свойства (S) она не потеряет.

Уравнениям (67) принадлежит $(n-q)$ совместных независимых интегралов:

$$u_1, u_2, \ldots u_{n-q}; \tag{77}$$

уравнениям (73) — $(n-q+1)$:

$$u_1, u_2, \ldots u_{n-q}, v_1, \tag{78}$$

$$X_q(v_1) \not\equiv 0; \tag{79}$$

уравнениям (74) — $(n-q+2)$:

$$u_1, u_2, \ldots u_{n-q}, v_1, v_2, \tag{80}$$

$$X_{q-1}(v_2) \not\equiv 0; \tag{81}$$

и т. д.,

уравнениям (75) — $(n-3)$:

$$u_1, u_2, \ldots u_{n-q}, v_1, v_2, \ldots v_{q-3}, \tag{82}$$

$$X_4(v_{q-3}) \not\equiv 0; \tag{83}$$

уравнениям (76) — $(n-2)$:

$$u_1, u_2, \ldots u_{n-q}, v_1, v_2, \ldots v_{q-2}, \tag{84}$$

$$X_3(v_{q-2}) \not\equiv 0; \tag{85}$$

уравнению $X_1(f)$ — $(n-1)$:

$$u_1, u_2, \ldots u_{n-q}, v_1, v_2, \ldots v_{q-1}, \tag{86}$$

$$X_2(v_{q-1}) \not\equiv 0. \tag{87}$$

§ 3. Приведение любой полной системы линейных однородных уравнений с частными производными первого порядка одной неизвестной функции к системе последовательных полных систем*

Покажем, что всякую полную систему линейных однородных уравнений с частными производными первого порядка одной неизвестной функции

* G. Pfeiffer. Sur les opérateurs d'un système complet d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue C.R., t. 190, 1930, pp. 909—911.

можно привести к системе последовательных полных систем бесчисленным множеством способов.

Наши рассуждения представляют обобщение исследований A. Clebsch'а.* Они проще последних. Да это и понятно. Clebsch приводит полную систему линейных уравнений к инволюционной системе, чтобы интегрировать по способу Jacobi, мы приводим полную систему линейных уравнений к системе последовательных полных систем, — которая менее ограничена, чем инволюционная система, — чтобы интегрировать обобщенным способом Jacobi.

Положим, что дана полная система q ($q > 2$) линейных однородных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} A_1(f) = \xi_1{}' \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2{}' \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n{}' \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\ A_2(f) = \xi_1{}^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2{}^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n{}^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_q(f) = \xi_1{}^q \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2{}^q \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n{}^q \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \end{array}\right\} \quad (88)$$

совместные независимые интегралы которой:

$$u_1, u_2, \ldots u_{n-q}. \quad (89)$$

Покажем, что есть возможность по системе (88) построить систему (R)—(67), с теми же совместными независимыми интегралами (89), обладающую свойствами (S).

Воспользовавшись отмеченным выше обстоятельством, состоящим в том, что система (R) — (67), обладающая свойством (S), при умножении левых частей уравнений (67) на некоторые множители, не теряет свойства (S), мы проведем рассуждения не в самом общем виде, а в слегка упрощенном.

* A. Clebsch. Über die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen. Journ. f. reine u. ang. Math., 1886, B. 65. SS. 257—268.

Не трудно убедиться, что коэффициенты зависимостей:

$$\left.\begin{array}{l} A_1(f)=X_1(f)+\alpha_{12}X_2(f)+\ldots+\alpha_{1,q-2}X_{q-2}(f)+\alpha_{1,q-1}X_{q-1}(f)+\alpha_{1q}X_q(f), \\ A_2(f)= \qquad\qquad X_2(f)+\ldots+\alpha_{2,q-2}X_{q-2}(f)+\alpha_{2,q-1}X_{q-1}(f)+\alpha_{2q}X_q(f), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{q-1}(f)= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad X_{q-1}(f)+\alpha_{q-1,q}X_q(f), \\ A_q(f)= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad X_q(f) \end{array}\right\} \qquad (90)$$

могут быть определены таким образом, чтобы выражения:

$$X_1(f),\ X_2(f),\ \ldots\ X_{q-1}(f),\ X_q(f), \qquad (91)$$

найденные из уравнений (90), которые решаются относительно выражений (91), дали бы систему (R)—(67), с интегралами (89), обладающую свойством (S).

Интегралы (89) принадлежат системе (R)—(67). Это видно из того, что системы (88) и (R)—(67) эквивалентны друг другу.

Чтобы система (R)—(67) обладала свойством (S), достаточно и необходимо выполнение следующих положений.

Первое положение. Система (R_1)—(73) должна обладать интегралом v_1, не обращающим уравнения:

$$X_q(f)=A_q(f)=0 \qquad (92)$$

в тождество:

$$X_q(v_1)=A_q(v_1)\neq 0; \qquad (93)$$

функция v_1 ограничена нетождеством (93), в остальном произвольна.

Это условие определяет коэффициенты:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{1q}=\dfrac{A_1(v_1)}{X_q(v_1)}=\dfrac{A_1(v_1)}{A_q(v_1)}, \\ \alpha_{2q}=\dfrac{A_2(v_1)}{X_q(v_1)}=\dfrac{A_2(v_1)}{A_q(v_1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{q-1,q}=\dfrac{A_{q-1}(v_1)}{X_q(v_1)}=\dfrac{A_{q-1}(v_1)}{A_q(v_1)}. \end{array}\right\} \qquad (94)$$

Зависимости (90) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
B_1(f) &= A_1(f) - \frac{A_1(v_1)}{A_q(v_1)} A_q(f) = \\
&= X_1(f) + \alpha_{12} X_2(f) + \ldots + \alpha_{1,q-2} X_{q-2}(f) + \alpha_{1,q-1} X_{q-1}(f), \\
B_2(f) &= A_2(f) - \frac{A_2(v_1)}{A_q(v_1)} A_q(f) = X_2(f) + \ldots + \alpha_{2,q-2} X_{q-2}(f) + \alpha_{2,q-1} X_{q-1}(f), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_{q-2}(f) &= A_{q-2}(f) - \frac{A_{q-2}(v_1)}{A_q(v_1)} A_q(f) = X_{q-2}(f) + \alpha_{q-2,q-1} X_{q-1}(f), \\
B_{q-1}(f) &= A_{q-1}(f) - \frac{A_{q-1}(v_1)}{A_q(v_1)} A_q(f) = X_{q-1}(f), \\
A_q(f) &= X_q(f).
\end{aligned}\right\} \quad (95)$$

Интересно обратить внимание на частный случай, когда функция v_1 оказалась бы интегралом системы:

$$A_1(f) = 0, \; A_2(f) = 0, \; \ldots \; A_{q-1}(f) = 0. \qquad (96)$$

Последняя должна быть полной.

Коэффициенты (94) обратятся в нули; изменений в рассуждениях не произойдет.

Второе положение. Система (R_2) — (74) должна обладать интегралом v_2, не обращающим уравнения:

$$X_{q-1}(f) = B_{q-1}(f) = 0 \qquad (97)$$

в тождество:

$$X_{q-1}(v_2) = B_{q-1}(v_2) \not\equiv 0; \qquad (98)$$

функция v_2 ограничена нетождеством (98), в остальном произвольна.

Это условие определяет коэффициенты:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{1,q-2} &= \frac{B_1(v_2)}{X_{q-1}(v_2)} = \frac{B_1(v_2)}{B_{q-1}(v_2)}, \\
\alpha_{2,q-1} &= \frac{B_2(v_2)}{X_{q-1}(v_2)} = \frac{B_2(v_2)}{B_{q-1}(v_2)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{q-2,q-1} &= \frac{B_{q-2}(v_2)}{X_{q-1}(v_2)} = \frac{B_{q-2}(v_2)}{B_{q-1}(v_2)}.
\end{aligned}\right\} \quad (99)$$

Зависимости (95) перепишутся в форме:

$$\left.\begin{array}{l}
C_1(f)=B_1(f)-\dfrac{B_1(v_2)}{B_{q-1}(v_2)}B_{q-1}(f)=X_1(f)+\alpha_{12}X_2(f)+\ldots+\alpha_{1,q-2}X_{q-2}(f),\\
C_2(f)=B_2(f)-\dfrac{B_2(v_2)}{B_{q-1}(v_2)}B_{q-1}(f)=\qquad\qquad X_2(f)+\ldots+\alpha_{2,q-2}X_{q-2}(f),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_{q-2}(f)=B_{q-2}(f)-\dfrac{B_{q-2}(v_2)}{B_{q-1}(v_2)}B_{q-1}(f)=\qquad\qquad\qquad X_{q-2}(f),\\
B_{q-1}(f)=A_{q-1}(f)-\dfrac{A_{q-1}(v_1)}{A_q(v_1)}=X_{q-1}(f),\\
A_q(f)=X_q(f).
\end{array}\right\}\quad(100)$$

И т. д.

В результате будем иметь систему (R) — (67) с совместными независимыми интегралами (89), обладающую свойством (S):

$$\left.\begin{array}{l}
W_1(f)=V_1(f)-\dfrac{V_1(v_{q-1})}{V_2(v_{q-1})}V_2(f)=X_1(f)=0,\\
V_2(f)=U_2(f)-\dfrac{U_2(v_{q-2})}{U_3(v_{q-2})}U_3(f)=X_2(f)=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_{q-2}(f)=B_{q-2}(f)-\dfrac{B_{q-2}(v_2)}{B_{q-1}(v_2)}B_{q-1}(f)=X_{q-2}(f)=0,\\
B_{q-1}(f)=A_{q-1}(f)-\dfrac{A_{q-1}(v_1)}{A_q(v_1)}A_q(f)=X_{q-1}(f)=0,\\
A_q(f)=X_q(f)=0.
\end{array}\right\}\quad(101)$$

Ясно, что от данной полной системы (88) можно перейти к системе последовательных полных систем (101) безчисленным множеством способов: функции v почти произвольны, выражения же $A(f)$, могут быть взяты в любой перестановке.

Частный случай. Положим, что интегралы:

$$v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_{q-1},\qquad(102)$$

удовлетворяющие нетождествам:

$$X_q(v_1)\not\equiv 0,\ X_{q-1}(v_2)\not\equiv 0,\ \ldots\ X_2(v_{q-1})\not\equiv 0,\qquad(103)$$

суть переменные:

$$x_1,\ x_2,\ \dots x_{q-1}; \tag{104}$$

тогда:

$$\alpha_{1q} = \frac{\xi_1{}'}{\xi_1{}^q},\ \alpha_{2q} = \frac{\xi_1{}^2}{\xi_1{}^q},\ \dots\ \alpha_{q-1,q} = \frac{\xi_1{}^{q-1}}{\xi_1{}^q}; \tag{105}$$

$$\left.\begin{aligned}
B_1(f) &= \eta_2{}' \frac{\partial f}{\partial x_2} + \eta_3{}' \frac{\partial f}{\partial x_3} + \dots + \eta_n{}' \frac{\partial f}{\partial x_n},\\
B_2(f) &= \eta_2{}^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \eta_3{}^2 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \dots + \eta_n{}^2 \frac{\partial f}{\partial x_n},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
B_{q-1}(f) &= \eta_2{}^{q-1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \eta_3{}^{q-1} \frac{\partial f}{\partial x_3} + \dots + \eta_n{}^{q-1} \frac{\partial f}{\partial x_n} = X_{q-1}(f),\\
A_q(f) &= \xi_1{}^q \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2{}^q \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_n{}^q \frac{\partial f}{\partial x_n} = X_q(f)
\end{aligned}\right\} \tag{106}$$

$$\eta_j{}^k = \frac{\xi_j{}^k \xi_1{}^q - \xi_1{}^k \xi_j{}^q}{\xi_1{}^q}, \tag{107}$$

$$k = 1, 2, \dots (q-1);\ j = 2, 3, \dots n;$$

$$\alpha_{1,q-1} = \frac{\eta_2{}'}{\eta_2{}^{p-1}},\ \alpha_{2,q-1} = \frac{\eta_2{}^2}{\eta_2{}^{q-1}}, \dots\ \alpha_{q-2,q-1} = \frac{\eta_2{}^{q-2}}{\eta_2{}^{q-1}}; \tag{108}$$

$$\left.\begin{aligned}
C_1(f) &= \zeta_3{}' \frac{\partial f}{\partial x_3} + \zeta_4{}' \frac{\partial f}{\partial x_4} + \dots + \zeta_n{}' \frac{\partial f}{\partial x_n},\\
C_2(f) &= \zeta_3{}^2 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \zeta_4{}^2 \frac{\partial f}{\partial x_4} + \dots + \zeta_n{}^2 \frac{\partial f}{\partial x_n},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
C_{q-2}(f) &= \zeta_3{}^{q-2} \frac{\partial f}{\partial x_3} + \zeta_4{}^{q-2} \frac{\partial f}{\partial x_4} + \dots + \zeta_n{}^{q-2} \frac{\partial f}{\partial x_n} = X_{q-2}(f),\\
B_{q-1}(f) &= \eta_2{}^{q-1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \eta_3{}^{q-1} \frac{\partial f}{\partial x_3} + \dots + \eta_n{}^{q-1} \frac{\partial f}{\partial x_n} = X_{q-1}(f),\\
A_q(f) &= \xi_1{}^q \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2{}^q \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_n{}^q \frac{\partial f}{\partial x_n} = X_q(f);
\end{aligned}\right\} \tag{109}$$

$$\zeta_j{}^k = \frac{\eta_j{}^k \eta_2{}^{q-1} - \eta_2{}^k \eta_j{}^{q-1}}{\eta_2{}^{q-1}}, \tag{110}$$

$$k = 1, 2, \dots (q-2);\ j = 3, 4, \dots n.$$

и т. д.

Система (88) перейдет в систему последовательных полных систем:

$$
\left.\begin{aligned}
X_1(f) &= \pi_q' \frac{\partial f}{\partial x_q} + \pi_{q+1}' \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \ldots + \pi_n' \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\
X_2(f) &= \pi_{q-1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_{q-1}} + \pi_q^2 \frac{\partial f}{\partial x_q} + \pi_{q+1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \ldots + \pi_n^2 \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\
X_3(f) &= \pi_{q-2}^3 \frac{\partial f}{\partial x_{q-2}} + \pi_{q-1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_{q-1}} + \pi_q^3 \frac{\partial f}{\partial x_q} + \pi_{q+1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \ldots + \pi_n^3 \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_q(f) &= \pi_1^q \frac{\partial f}{\partial x_1} + \pi_2^q \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \pi_{q-1}^q \frac{\partial f}{\partial x_{q-1}} + \pi_q^q \frac{\partial f}{\partial x_q} + \pi_{q+1}^q \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \ldots + \pi_n^q \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (111)
$$

обладающую свойством:

$$
\left.\begin{aligned}
& X_1 X_2(f) - X_2 X_1(f) \equiv \lambda_{12}' X_1(f) + X_1(\pi_{q-1}^2) X_2(f); \\
& X_i X_3(f) - X_3 X_i(f) \equiv \lambda_{i3}' X_1(f) + \lambda_{i3}^2 X_2(f) + X_i(\pi_{q-2}^3) X_3(f), \\
& \qquad i = 1, 2; \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& X_i X_q(f) - X_q X_i(f) \equiv \lambda_{iq}' X_1(f) + \lambda_{iq}^2 X_2(f) + \ldots + \lambda_{iq}^{q-1} X_{q-1}(f) + \\
& \qquad + X_i(\pi_1^q) X_q(f), \\
& \qquad i = 1, 2, \ldots (q-1).
\end{aligned}\right\} \quad (112)
$$

В системе (111) операторами: уравнения:

$$X_1(f) = 0 \qquad (113)$$

и полных систем:

$$
\left.\begin{aligned}
& X_1(f) = 0,\ X_2(f) = 0; \\
& X_1(f) = 0,\ X_2(f) = 0,\ X_3(f) = 0; \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& X_1(f) = 0,\ X_2(f) = 0,\ \ldots\ X_{q-2}(f) = 0,\ X_{q-1}(f) = 0
\end{aligned}\right\} \quad (114)
$$

являются бесконечно малые преобразования:

$$Z_1(f)=\frac{X_2(f)}{X_2(x_{q-1})}=\frac{X_2(f)}{\pi_{q-1}^2},$$

$$Z_2(f)=\frac{X_3(f)}{X_3(x_{q-2})}=\frac{X_3(f)}{\pi_{q-2}^3}, \dots Z_{q-1}(f)=\frac{X_q(f)}{X_q(x_1)}=\frac{X_q(f)}{\pi_1{}^q}. \tag{115}$$

По полной системе:

$$A_1(f)=0,\ A_2(f)=0,\ \dots\ A_{q-1}(f)=0,\ A_q(f)=0 \tag{116}$$

систему (111) удобно строить следующим образом.

Возьмем одно из уравнений (116), содержащее производную $\frac{\partial f}{\partial x_1}$; пусть оно будет $A_q(f)=0$. Помощью $A_q(f)=0$ исключим из остальных уравнений (116) производную $\frac{\partial f}{\partial x_1}$; получим систему:

$$B_1(f)=0,\ B_2(f)=0,\ \dots\ B_{q-2}(f)=0,\ B_{q-1}(f)=0. \tag{117}$$

Среди уравнений (117) выберем содержащее производную $\frac{\partial f}{\partial x_2}$; пусть оно будет $B_{q-1}(f)=0$. Помощью $B_{q-1}(f)=0$ исключим из остальных уравнений (117) производную $\frac{\partial f}{\partial x_2}$; получим систему:

$$C_1(f)=0,\ C_2(f)=0,\ \dots\ C_{q-3}(f)=0,\ C_{q-2}(f)=0. \tag{118}$$

Среди уравнений (118) выберем содержащее производную $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, и т. д. В результате придем к системе последовательных полных систем (111):

$$W_1(f)=X_1(f)=0,\ V_2(f)=X_2(f)=0,\ \dots\ C_{q-2}(f)=X_{q-2}(f)=0,$$
$$B_{q-1}(f)=X_{q-1}(f)=0,\ A_q(f)=X_q(f)=0. \tag{119}$$

Если примем:

$$\pi_{q-1}^2=\pi_{q-2}^3=\dots=\pi_1{}^q=1,$$

чего всегда можно достигнуть, разделив второе, третье, ... последнее уравнения (111) на их первые коэффициенты, то операторами уравнения (113) и полных систем (114) будут бесконечно малые преобразования:

$$X_2(f),\ X_3(f),\ \ldots\ X_q(f); \tag{120}$$

в соотношениях (112) исчезнут последние члены.

При условии:

$$\pi_q^{\,\prime} = \pi_{q-1}^2 = \pi_{q-2}^3 = \ldots = \pi_1^{\,q} = 1 \tag{121}$$

систему (111) назовем системой последовательных полных систем, обобщающей Jacobi'еву систему. Она проста по виду и вполне заменяет Jacobi'еву систему.

§ 4. Интегрирование систем последовательных полных систем

Займемся интегрированием системы (R) — (67), обладающей свойством (S) — системы последовательных полных систем.

Положим, что в тождестве (s_1) коэффициенты λ^1_{12}, λ^2_{12} отличны от нуля:

$$\lambda'_{12} \neq 0, \quad \lambda^2_{12} \neq 0. \tag{122}$$

В этом случае безразлично, с какого из первых двух уравнений системы (R):

$$X_1(f) = 0 \text{ или } X_2(f) = 0 \tag{123}$$

начать интегрирование.*

Обозначим независимые интегралы уравнения:

$$\underline{X_1(f) = 0} \tag{124}$$

через:

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\ \varphi_{n-1}. \tag{125}$$

При условии:

$$X_2(\varphi_{n-1}) \neq 0, \tag{126}$$

* На практике, ясно, начинают с интегрирования, более простого по виду.

не ограничивающем общности рассуждений, оператором уравнения (123) является бесконечно малое преобразование:

$$Z(f)=\frac{X_2(f)}{X_2(\varphi_{n-1})}. \tag{127}$$

Установив тождества:

$$Z(\varphi_1)\ \omega_1=(\varphi_1,\ldots\varphi_{n-1}),$$

$$Z(\varphi_2)=\omega_2(\varphi_1,\ldots\varphi_{n-1}),\ldots Z(\varphi_{n-2})=\omega_{n-2}(\varphi_1,\ldots\varphi_{n-1}),\ Z(\varphi_{n-1})=1, \tag{128}$$

берем функцию:

$$\theta(\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_{n-1}) \tag{129}$$

и требуем от нее, чтобы:

$$Z(\theta)=\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}\omega_1+\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_2}\omega_2+\ldots+\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_{n-2}}\omega_{n-2}+\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_{n-1}}=0, \tag{130}$$

$$\frac{d\varphi_1}{\omega_1}=\frac{d\varphi_2}{\omega_2}=\ldots=\frac{d\varphi_{n-2}}{\omega_{n-2}}=\frac{d\varphi_{n-1}}{1}. \tag{131}$$

Независимыми интегралами полной системы:

$$\underline{X_1(f)=0,\quad X_2(f)=0} \tag{132}$$

будут независимые интегралы системы (131):

$$\varphi_1',\ \varphi_2',\ldots\varphi_{n-2}'. \tag{133}$$

Когда в тождестве (s_1) коэффициент λ^2_{12} равен нулю, коэффициент же λ'_{12} нуль или не нуль, примем покуда, что он не нуль:

$$\lambda'_{12}\neq 0,\quad \lambda^2_{12}=0, \tag{134}$$

выражение (126) — интеграл уравнения (124):

$$X_2(\varphi_{n-1})=\tilde{\omega}(\varphi_1,\ldots\varphi_{n-1}). \tag{135}$$

Операторами уравнения (124) являются бесконечно малые преобразования:

$$X_2(f),\quad Z(f)=\frac{X_2(f)}{X_2(\varphi_{n-1})}. \tag{136}$$

Одновременно с интегралами:

$$X_2(\varphi_1) = \tilde{\omega}_1(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}), \ldots X_2(\varphi_{n-2}) = \tilde{\omega}_{n-2}(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}),$$
$$X_2(\varphi_{n-1}) = \tilde{\omega}(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}) \qquad (137)$$

уравнение (124) имеет интегралы:

$$Z(\varphi_1) = \frac{X_2(\varphi_1)}{X_2(\varphi_{n-1})} = \frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}} = \omega_1(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}), \ldots Z(\varphi_{n-2}) = \frac{X_2(\varphi_{n-2})}{X_2(\varphi_{n-1})} =$$
$$= \frac{\tilde{\omega}_{n-2}}{\tilde{\omega}} = \omega_{n-2}(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}), \; Z(\varphi_{n-1}) = \frac{X_2(\varphi_{n-1})}{X_2(\varphi_{n-1})} = 1. \qquad (138)$$

Уравнения:

$$X_2(\theta) = 0 \text{ и } Z(\theta) = 0 \qquad (139)$$

эквивалентны друг другу:

$$X_2(\theta) = \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}\tilde{\omega}_1 + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_2}\tilde{\omega}_2 + \ldots + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_{n-2}}\tilde{\omega}_{n-2} + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_{n-1}}\tilde{\omega} =$$
$$= \tilde{\omega}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}\omega_1 + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_2}\omega_2 + \ldots + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_{n-2}}\omega_{n-2} + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_{n-1}}\right) = \tilde{\omega}\, Z(\theta). \qquad (140)$$

Когда

$$\lambda'_{12} = 0, \quad \lambda^2_{12} \neq 0, \qquad (141)$$

начинают интегрирование не с уравнения (124), а с уравнения:

$$X_2(f) = 0 \qquad (142)$$

и пользуются оператором:

$$X_1(f). \qquad (143)$$

В случае инволюционности системы (132)

$$\lambda'_{12} = 0, \quad \lambda^2_{12} = 0, \qquad (144)$$

— Jacobi'ев случай — безразлично, с какого из первых двух уравнений (123) системы (R) — (67) начать интегрирование. Для уравнения $X_1(f) = 0$ оператором служит бесконечно малое преобразование $X_2(f)$, для уравнения $X_2(f) = 0$ — бесконечно малое преобразование $X_1(f)$.

Располагая интегралами (133) системы (132), переходим к рассмотрению тождества (s_2).

Примем сначала, что хоть один из коэффициентов:

$$\lambda_{i3}^{3} \quad (i=1,2) \tag{145}$$

не нуль, тогда, при условии:

$$X_3(\varphi_{n-2}') \neq 0, \tag{146}$$

не ограничивающем общности рассуждений, оператором системы (132) является бесконечно малое преобразование:

$$Z_1(f) = \frac{X_3(f)}{X_3(\varphi_{n-2}')}. \tag{147}$$

Установив тождества:

$$Z_1(\varphi_1') = \omega_1'(\varphi_1', \ldots \varphi_{n-2}'),$$
$$Z_1(\varphi_2') = \omega_2'(\varphi_1', \ldots \varphi_{n-2}'), \ldots Z_1(\varphi_{n-3}') = \omega_{n-3}'(\varphi_3', \ldots \varphi_{n-2}'), \tag{148}$$
$$Z_1(\varphi_{n-2}') = 1,$$

берем функцию:

$$\theta_1(\varphi_1', \varphi_2', \ldots \varphi_{n-2}') \tag{149}$$

и накладываем на нее требование:

$$Z_1(\theta_1) = \frac{\partial\theta_1}{\partial\varphi_1'}\omega_1' + \frac{\partial\theta_1}{\partial\varphi_2'}\omega_2' + \ldots + \frac{\partial\theta_1}{\partial\varphi_{n-3}'}\omega_{n-3}' + \frac{\partial\theta_1}{\partial\varphi_{n-2}'} = 0; \tag{150}$$

$$\frac{d\varphi_1'}{\omega_1'} = \frac{d\varphi_2'}{\omega_2'} = \ldots = \frac{d\varphi_{n-3}'}{\omega_{n-3}'} = \frac{d\varphi_{n-2}'}{1}. \tag{151}$$

Интегралами полной системы:

$$\underline{X_1(f) = 0, \quad X_2(f) = 0, \quad X_3(f) = 0} \tag{152}$$

будут интегралы системы (151):

$$\varphi_1^2, \varphi_2^2, \ldots \varphi_{n-3}^2. \tag{153}$$

Если бы оба коэффициента (145) равнялись нулю:

$$\lambda_{13}^{3} = 0, \quad \lambda_{23}^{3} = 0, \tag{154}$$

операторами системы (132) были бы бесконечно малые преобразования:

$$X_3(f), \quad Z_1(f) = \frac{X_3(f)}{X_3(\varphi_{n-2}')}. \tag{155}$$

и т. д.

Положим, что интегралы полной системы:

$$\underline{X_1(f)=0, \; X_2(f)=0, \; \ldots \; X_l(f)=0,} \tag{156}$$

$$l \leqslant q-1$$

найдены:

$$\varphi_1^{\,l-1}, \; \varphi_2^{\,l-1}, \; \ldots \; \varphi_{n-l}^{l-1}, \tag{157}$$

тогда переходим к рассмотрению тождеств (s_l).

Если хоть один из коэффициентов:

$$\lambda_{i,\,l+1}^{l+1} \qquad (i=1, 2, \ldots l) \tag{158}$$

отличен от нуля, оператором системы (156), в предположении:

$$X_{l+1}(\varphi_{n-l}^{l-1}) \neq 0, \tag{159}$$

является бесконечно малое преобразование:

$$Z_{l-1}(f)=\frac{X_{l+1}(f)}{X_{l+1}(\varphi_{n-l}^{l-1})}. \tag{160}$$

Установив тождества:

$$Z_{l-1}(\varphi_1^{\,l-1})=\omega_1^{\,l-1}(\varphi_1^{\,l-1}, \ldots \varphi_{n-l}^{l-1}), \ldots$$
$$\ldots Z_{l-1}(\varphi_{n-l-1}^{l-1})=\omega_{n-l-1}^{l-1}(\varphi_1^{l-1}, \ldots \varphi_{n-l}^{l-1}), \; Z_{l-1}(\varphi_{n-l}^{l-1})=1, \tag{161}$$

берем функцию:

$$\theta_{l-1}(\varphi_1^{l-1}, \varphi_2^{l-1}, \ldots \varphi_{n-l}^{l-1}) \tag{162}$$

и т. д.

Когда коэффициенты (158) равны нулю:

$$\lambda_{1,\,l+1}^{l+1}=0, \; \lambda_{2,\,l+1}^{l+1}=0, \; \ldots \; \lambda_{l,\,l+1}^{l+1}=0, \tag{163}$$

операторами системы (156) служат бесконечно малые преобразования:

$$X_{l+1}(f), \quad Z_{l-1}(f)=\frac{X_{l+1}(f)}{X_{l+1}(\varphi_{n-l}^{l-1})}. \tag{164}$$

Вопрос, собственно говоря, исчерпан, но мы желаем остановится на процессе Jacobi, под которым разумеем последовательное применение одного и того же оператора к данному интегралу. Он, не по сути, но на практике существенная часть способа Jacobi.

Приняв, что интегрирование системы (R) — (67) начато с уравнения (124), рассмотрим два основных случая.

I случай. Допустим, что отличны от нуля: коэффициент:

$$\lambda_{12}^2 \tag{165}$$

и хоть один коэффициент в каждом из рядов:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{13}^3,\ \lambda_{23}^3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{1,l+1}^{l+1},\ \lambda_{2,l+1}^{l+1},\ \dots\ \lambda_{l,l+1}^{l+1}, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{166}$$

Предполагая, что в группах интегралов (125), (133), (153), ... (157)....

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1,\ \ \varphi_2,\ \ \dots\ \varphi_{n-2},\ \varphi_{n-1}; \\ \varphi_1',\ \ \varphi_2',\ \dots\ \varphi_{n-2}'; \\ \dots\dots\dots\dots \\ \varphi_1^{l-1},\ \varphi_2^{l-1},\ \dots\ \varphi_{n-l}^{l-1}; \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{167}$$

сверх последних интегралов;

$$\varphi_{n-1},\ \varphi_{n-2}',\ \dots\ \varphi_{n-l}^{l-1},\ \dots, \tag{168}$$

удовлетворяющих нетождествам (126), (146), ...(159), ...:

$$X_2(\varphi_{n-1}) \neq 0,\ \ X_3(\varphi_{n-2}') \neq 0,\ \dots\ X_{l+1}(\varphi_{n-l}^{l-1}) \neq 0,\ \dots \tag{169}$$

известны только первые:

$$\varphi_1,\ \varphi_1',\ \dots\ \varphi_1^{l-1},\ \dots, \tag{170}$$

помощью операторов (127), (147), ... (160), ...:

$$Z(f),\ Z_1(f),\ \dots\ Z_{l-1}(f),\ \dots \tag{171}$$

установим ряды интегралов:

$$\left.\begin{array}{c}
\varphi_1, \quad \varphi_2 = Z(\varphi_1), \quad \varphi_3 = Z(\varphi_2), \ \dots \ \varphi_i = Z(\varphi_{i-1}), \\
\varphi_{i+1} = Z(\varphi_i) = \pi(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_i); \\
\varphi_1', \ \varphi_2' = Z_1(\varphi_1'), \ \varphi_3' = Z_1(\varphi_2'), \ \dots \ \varphi_{i_1}' = Z_1(\varphi_{i_1-1}'), \\
\varphi_{i_1+1}' = Z_1(\varphi_{i_1}') = \pi_1(\varphi_1', \varphi_2', \dots \varphi_{i_1}'); \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\varphi_1^{l-1}, \ \varphi_2^{l-1} = Z_{l-1}(\varphi_1^{l-1}), \ \varphi_3^{l-1} = Z_{l-1}(\varphi_2^{l-1}), \ \dots \\
\dots \ \varphi_{i_{l-1}}^{l-1} = Z_{l-1}(\varphi_{i_{l-1}-1}^{l-1}), \ \varphi_{i_{l-1}+1}^{l-1} = Z_{l-1}(\varphi_{i_{l-1}}^{l-1}) = \\
= \pi_{l-1}(\varphi_1^{l-1}, \varphi_2^{l-1}, \dots \varphi_{i_{l-1}}^{l-1}). \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\} \quad (172)$$

В системах (131), (151),... выделятся системы:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{d\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{d\varphi_2}{\varphi_3} = \dots = \frac{d\varphi_{i-1}}{\varphi_i} = \frac{d\varphi_i}{\pi(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_i)} = \frac{d\varphi_{n-1}}{1}; \\
\frac{d\varphi_1'}{\varphi_2'} = \frac{d\varphi_2'}{\varphi_3'} = \dots = \frac{d\varphi'_{i-1}}{\varphi_i'} = \frac{d\varphi_i'}{\pi_1(\varphi_1', \varphi_2', \dots \varphi_i')} = \frac{d\varphi'_{n-2}}{1}; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\} \quad (173)$$

которые интегрируются независимо от остальных уровнений систем (131), (151),...

II случай. Допустим, что коэффициенты (165) и все коэффициенты рядов (166) равны нулю.

Предполагая, что в группах интегралов (167) известны только первые (170), помощью операторов:

$$X_2(f), \ X_3(f) \ \dots \ X_{l+1}(f), \ \dots \quad (174)$$

установим ряды интегралов.*

* На исключительных случаях мы не останавливаемся.

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_1,\ \ \varphi_2 = X_2(\varphi_1),\ \ \varphi_3 = X_2(\varphi_2)\ \ldots\ \varphi_i = X_2(\varphi_{i-1}),\\ \varphi_{i+1} = X_2(\varphi_i) = \pi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_i);\\ \varphi_1', \varphi_2' = X_3(\varphi_1'), \varphi_3' = X_3(\varphi_2'), \ldots \varphi_{i_1}' = X_3(\varphi_{i_1-1}'),\\ \varphi_{i_1+1}' = X_3(\varphi_{i_1}') = \pi_1(\varphi_1', \varphi_2', \ldots \varphi_{i_1}');\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \qquad (175)$$

В системах (131), (151), . . . выделятся системы:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{d\varphi_1}{\varphi_2} = \dfrac{d\varphi_2}{\varphi_3} = \cdots = \dfrac{d\varphi_{i-1}}{\varphi_i} = \dfrac{d\varphi_i}{\pi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_i)};\\ \dfrac{d\varphi_1'}{\varphi_2'} = \dfrac{d\varphi_2'}{\varphi_3'} = \cdots = \dfrac{d\varphi_{i_1-1}'}{\varphi_{i_1}'} = \dfrac{d\varphi_{i_1}'}{\pi_1(\varphi_1', \varphi_2', \ldots \varphi_{i_1}')};\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \qquad (176)$$

которые интегрируются независимо от остальных уравнений систем (131), (151), . . .

Если отношения строк (176) обозначим через:

$$dt_1,\ dt_2,\ \ldots, \qquad (177)$$

то, проинтегрировав системы (176), найдем t_1, t_2, . . . помощью квадратур. Они будут теми интегралами t_1, t_2, . . . групп (167), аналогичными интегралам (168), для которых:

$$X_2(t_1) = 1,\ \ X_3(t_2) = 1,\ \ldots,\ X_{l+1}(t_l) = 1,\ \ldots \qquad (178)$$

Изложенный прием интегрирования системы последовательных полных систем (R) — (67), к которой приводится любая полная система, представляет безусловно обобщение способа Jacobi.

Считаем не лишним дать примеры.*

* Нами проинтегрировано указанным приемом много примеров.

§ 5. Примеры

*I пример.** Дана полная система:

$$\left.\begin{aligned} X_1(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\ X_2(f) &= x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\ X_3(f) &= x_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n^2 \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{179}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 X_2(f) - X_2 X_1(f) &\equiv X_1(f), & (180_1) \\ X_1 X_3(f) - X_3 X_1(f) &\equiv 2X_2(f), & (180_2) \\ X_2 X_3(f) - X_3 X_2(f) &\equiv X_3(f). & (180_3) \end{aligned}\right\} \tag{180}$$

Независимыми интегралами уравнения:

$$\underline{X_1(f) = 0,} \tag{181}$$

$$dx_1 = dx_2 = \cdots = dx_n \tag{182}$$

являются функции

$$\varphi_1 = x_1 - x_n, \quad \varphi_2 = x_2 - x_n, \ \ldots \ \varphi_{n-1} = x_{n-1} - x_n. \tag{183}$$

В силу тождества (180_1), бесконечно малое преобразование:

$$X_2(f) \tag{184}$$

— оператор уравнения (181):

$$X_2(\varphi_1) = \varphi_1, \quad X_2(\varphi_2) = \varphi_2, \ \ldots \ X_2(\varphi_{n-1}) = \varphi_{n-1}. \tag{185}$$

Подберем функцию:

$$\theta(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}) \tag{186}$$

таким образом, чтобы:

$$X_2(\theta) = \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}\varphi_1 + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_2}\varphi_2 + \ldots + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_{n-1}}\varphi_{n-1} = 0, \tag{187}$$

$$\frac{d\varphi_1}{\varphi_1} = \frac{d\varphi_2}{\varphi_2} = \ldots = \frac{d\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-1}}. \tag{188}$$

* I. A. Serret. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Dritte Aufl., B. III, Leipzig, 1909, SS. 529 u. 537—538.

Отсюда видно, что системе:

$$\underline{X_1(f)=0, \quad X_2(f)=0} \tag{189}$$

принадлежат независимые интегралы

$$\psi_1=\frac{\varphi_1}{\varphi_{n-1}},\ \psi_2=\frac{\varphi_2}{\varphi_{n-1}},\ \ldots\ \psi_{n-2}=\frac{\varphi_{n-2}}{\varphi_{n-1}}. \tag{190}$$

В силу тождеств (180_2), (180_3), бесконечно малое преобразование:

$$Z(f)=\frac{X_3(f)}{X_3(\psi_{n-2})} \tag{191}$$

— оператор системы (189).

Так как:

$$\left.\begin{aligned} X_3(\varphi_1)&=(x_1+x_n)\varphi_1,\\ X_3(\varphi_2)&=(x_2+x_n)\varphi_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ X_3(\varphi_{n-1})&=(x_{n-1}+x_n)\varphi_{n-1}; \end{aligned}\right\} \tag{192}$$

$$\left.\begin{aligned} X_3(\psi_1)&=\psi_1(\varphi_1-\varphi_{n-1}),\\ X_3(\psi_2)&=\psi_2(\varphi_2-\varphi_{n-1}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ X_3(\psi_{n-2})&=\psi_{n-2}(\varphi_{n-2}-\varphi_{n-1}), \end{aligned}\right\} \tag{193}$$

то:

$$\left.\begin{aligned} Z(\psi_1)&=\frac{\psi_1}{\psi_{n-2}}\frac{(\psi_1-1)}{(\psi_{n-2}-1)},\\ Z(\psi_2)&=\frac{\psi_2}{\psi_{n-2}}\frac{(\psi_2-1)}{(\psi_{n-2}-1)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ Z(\psi_{n-3})&=\frac{\psi_{n-3}}{\psi_{n-2}}\frac{(\psi_{n-3}-1)}{(\psi_{n-2}-1)},\\ Z(\psi_{n-2})&=1. \end{aligned}\right\} \tag{194}$$

Подберем функцию:

$$\theta(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{n-2}, \psi_{n-n}) \tag{195}$$

таким образом, чтобы:

$$Z(\theta)=\frac{\partial\theta}{\partial\psi_1}\,\frac{\psi_1(\psi_1-1)}{\psi_{n-2}(\psi_{n-2}-1)}+\frac{\partial\theta}{\partial\psi_2}\,\frac{\psi_2(\psi_2-1)}{\psi_{n-2}(\psi_{n-2}-1)}+$$
$$+\ldots+\frac{\partial\theta}{\partial\psi_{n-3}}\,\frac{\psi_{n-3}(\psi_{n-3}-1)}{\psi_{n-2}(\psi_{n-2}-1)}+\frac{\partial\theta}{\partial\psi_{n-2}}=0, \tag{196}$$

$$\frac{d\psi_1}{\psi_1(\psi_1-1)}=\frac{d\psi_2}{\psi_2(\psi_2-1)}=\ldots=\frac{d\psi_{n-3}}{\psi_{n-3}(\psi_{n-3}-1)}=\frac{d\psi_{n-2}}{\psi_{n-2}(\psi_{n-2}-1)}. \tag{197}$$

Выражения:

$$\left.\begin{aligned}
\chi_1&=\frac{\psi_{n-2}(\psi_1-1)}{\psi_1(\psi_{n-2}-1)}=\frac{\varphi_{n-2}(\varphi_1-\varphi_{n-1})}{\varphi_1(\varphi_{n-2}-\varphi_{n-1})}=\frac{(x_{n-2}-x_n)(x_1-x_{n-1})}{(x_1-x_n)(x_{n-2}-x_{n-1})},\\
\chi_2'&=\frac{\psi_{n-2}(\psi_2-1)}{\psi_2(\psi_{n-2}-1)}=\frac{\varphi_{n-2}(\varphi_2-\varphi_{n-1})}{\varphi_2(\varphi_{n-2}-\varphi_{n-1})}=\frac{(x_{n-2}-x_n)(x_2-x_{n-1})}{(x_2-x_n)(x_{n-2}-x_{n-1})},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\chi_{n-3}&=\frac{\psi_{n-2}(\psi_{n-3}-1)}{\psi_{n-3}(\psi_{n-1}-1)}=\frac{\varphi_{n-2}(\varphi_{n-3}-\varphi_{n-1})}{\varphi_{n-3}(\varphi_{n-2}-\varphi_{n-1})}=\frac{(x_{n-2}-x_n)(x_{n-3}-x_{n-1})}{(x_{n-3}-x_n)(x_{n-2}-x_{n-1})}
\end{aligned}\right\} \tag{198}$$

представляют независимые интегралы данной системы:

$$\underline{X_1(f)=0,\quad X_2(f)=0,\quad X_3(f)=0.} \tag{199}$$

Интегрирование системы (179) можно произвести несколько иначе.

Заменим систему (179), эквивалентной ей, системой последовательных полных систем:

$$\left.\begin{aligned}
H_1(f)&=(x_1-x_{n-1})(x_1-x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1}+(x_2-x_{n-1})(x_2-x_n)\frac{\partial f}{\partial x_2}+\\
&\quad+\ldots+(x_{n-2}-x_{n-1})(x_{n-2}-x_n)\frac{\partial f}{\partial x_{n-2}}=0,\\
H_2(f)&=(x_1-x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1}+(x_2-x_n)\frac{\partial f}{\partial x_2}+\\
&\quad+\ldots+(x_{n-2}-x_n)\frac{\partial f}{\partial x_{n-2}}+(x_{n-1}-x_n)\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}=0,\\
H_3(f)&=x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+x_{n-2}\frac{\partial f}{\partial x_{n-2}}+x_{n-1}\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{200}$$

Выражения (198) — интегралы системы:

$$\frac{dx_1}{(x_1-x_{n-1})(x_1-x_n)}=\frac{dx_2}{(x_2-x_{n-1})(x_2-x_n)}=$$

$$=\cdots=\frac{dx_{n-3}}{(x_{n-3}-x_{n-1})(x_{n-3}-x_n)}=$$

$$=\frac{dx_{n-2}}{(x_{n-2}-x_{n-1})(x_{n-2}-x_n)}=\frac{dx_{n-1}}{0}=\frac{dx_n}{0}, \tag{201}$$

т. е. интегралы первого уравнения (200). Не трудно видеть, что они же — интегралы второго и третьего уравнений (200).

II пример (Forsyth'a).* Дана полная система:

$$\left.\begin{aligned}
X_1(f)&=(x_4-x_5)\frac{\partial f}{\partial x_3}+(x_5-x_6)\frac{\partial f}{\partial x_1}+(x_6-x_4)\frac{\partial f}{\partial x_2}=0,\\
X_2(f)&=(x_4-x_5)\frac{\partial f}{\partial x_6}+(x_5-x_3)\frac{\partial f}{\partial x_1}+(x_3-x_4)\frac{\partial f}{\partial x_2}=0,\\
X_3(f)&=(x_4-x_5)\frac{\partial f}{\partial x_4}+(x_5-x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}+(x_1-x_4)\frac{\partial f}{\partial x_2}=0,\\
X_4(f)&=(x_4-x_5)\frac{\partial f}{\partial x_5}+(x_5-x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1}+(x_2-x_4)\frac{\partial f}{\partial x_2}=0,
\end{aligned}\right\} \tag{202}$$

$$\left.\begin{aligned}
&X_1X_2(f)-X_2X_1(f)\equiv 0 &&(203_1)\\
&X_1X_3(f)-X_3X_1(f)\equiv -X_1(f), &&(203_2)\\
&X_2X_3(f)-X_3X_2(f)\equiv -X_2(f), &&(203_3)\\
&X_1X_4(f)-X_4X_1(f)\equiv X_1(f), &&(203_4)\\
&X_2X_4(f)-X_4X_2(f)\equiv X_2(f), &&(203_5)\\
&X_3X_4(f)-X_4X_3(f)\equiv X_3(f)+X_4(f). &&(203_6)
\end{aligned}\right\} \tag{203}$$

Независимыми интегралами уравнения:

$$\underline{X_1(f)=0,} \tag{204}$$

$$\frac{dx_1}{x_5-x_4}=\frac{dx_2}{x_6-x_4}=\frac{dx_3}{x_4-x_5}=\frac{dx_4}{0}=\frac{dx_5}{0}=\frac{dx_6}{0} \tag{205}$$

* Ed. Goursat. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris, 1921, p. 96.

являются функции:

$$\varphi_1 = x_1(x_4 - x_5) - x_3(x_5 - x_6),$$

$$\varphi_2 = x_2(x_4 - x_5) - x_3(x_3 - x_4), \quad \varphi_3 = x_4, \quad \varphi_4 = x_5, \quad \varphi_5 = x_6. \tag{206}$$

В силу тождества (203_1), бесконечно малое преобразование:

$$X_2(f) \tag{207}$$

— оператор уравнения (204):

$$X_2(\varphi_1) = (\varphi_3 - \varphi_4)\varphi_4, \quad X_2(\varphi_2) = -(\varphi_3 - \varphi_4)\varphi_3, \quad X_2(\varphi_3) = 0,$$
$$X_2(\varphi_4) = 0, \quad X_2(\varphi_5) = \varphi_3 - \varphi_4. \tag{208}$$

Подберем функцию:

$$\theta(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5) \tag{209}$$

таким образом, чтобы:

$$X_2(\theta) = \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}(\varphi_3 - \varphi_4)\varphi_4 - \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_2}(\varphi_3 - \varphi_4)\varphi_3 + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_5}(\varphi_3 - \varphi_4) = 0, \tag{210}$$

$$\frac{d\varphi_1}{\varphi_4} = \frac{d\varphi_2}{-\varphi_3} = \frac{d\varphi_3}{0} = \frac{d\varphi_4}{0} = \frac{d\varphi_5}{1}. \tag{211}$$

Отсюда видно, что системе:

$$X_1(f) = 0, \quad X_2(f) = 0 \tag{212}$$

пранадлежат независимые интегралы:

$$\psi_1 = \varphi_1 - \varphi_4\varphi_5, \quad \psi_2 = \varphi_2 + \varphi_3\varphi_5, \quad \psi_3 = \varphi_3, \quad \psi_4 = \varphi_4. \tag{213}$$

В силу тождеств (200_2), (200_3), бесконечно малое преобразование:

$$X_3(f) \tag{214}$$

— оператор системы (212),

Так как:

$$\left.\begin{aligned} X_3(\varphi_1) &= (\varphi_3 - \varphi_4)\varphi_4, \\ X_3(\varphi_2) &= \varphi_1 + \varphi_2 - (\varphi_3 - \varphi_4)\varphi_3, \\ X_3(\varphi_3) &= \varphi_3 - \varphi_4, \\ X_3(\varphi_4) &= 0, \\ X_3(\varphi_5) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{215}$$

то:

$$\left.\begin{aligned} X_3(\psi_1) &= (\psi_3 - \psi_4)\psi_4, \\ X_3(\psi_2) &= \psi_1 + \psi_2 - (\psi_3 - \psi_4)\psi_3, \\ X_3(\psi_3) &= \psi_3 - \psi_4, \\ X_3(\psi_4) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{216}$$

Подберем функцию:

$$\theta(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) \tag{217}$$

таким образом, чтобы:

$$X_3(\theta) = \frac{\partial\theta}{\partial\psi_1}(\psi_3 - \psi_4)\psi_4 + \frac{\partial\theta}{\partial\psi_2}[\psi_1 + \psi_2 - (\psi_3 - \psi_4)\psi_3] +$$

$$+ \frac{\partial\theta}{\partial\psi_3}(\psi_3 - \psi_4) = 0, \tag{218}$$

$$\frac{d\psi_1}{(\psi_3 - \psi_4)\psi_4} = \frac{d\psi_2}{\psi_1 + \psi_2 - (\psi_3 - \psi_4)\psi_3} = \frac{d\psi_3}{\psi_3 - \psi_4} = \frac{d\psi_4}{0}. \tag{219}$$

Системе:

$$\underline{X_1(f) = 0, \quad X_2(f) = 0. \quad X_3(f) = 0} \tag{220}$$

принадлежат независимые интегралы:

$$\chi_1 = \psi_1 - \psi_3\psi_4, \quad \chi_2 = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\psi_3 - \psi_4} + \psi_3, \quad \chi_3 = \psi_4. \tag{221}$$

В силу тождеств (203_4), (203_5), (203_6), бесконечно малое преобразование:

$$Z(f) = \frac{X_4(f)}{X_4(\psi_4)} = \frac{X_4(f)}{x_4 - x_5} = \frac{X_4(f)}{\varphi_3 - \varphi_4} = \frac{X_4(f)}{\psi_3 - \psi_4} \tag{222}$$

— оператор системы (220).

Так как:

$$\left.\begin{aligned} X_4(\varphi_1) &= -(\varphi_1 + \varphi_2) + (\varphi_3 - \varphi_4)\varphi_4, \\ X_4(\varphi_2) &= -(\varphi_3 - \varphi_4)\varphi_3, \\ X_4(\varphi_3) &= 0, \\ X_4(\varphi_4) &= \varphi_3 - \varphi_4, \\ X_4(\varphi_5) &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{223}$$

$$\left.\begin{aligned} X_4(\psi_1) &= -(\psi_1 + \psi_2) + (\psi_3 - \psi_4)\psi_4, \\ X_4(\psi_2 &= -(\psi_3 - \psi_4)\psi_3, \\ X_4(\psi_3) &= 0, \\ X_4(\psi_4) &= \psi_3 - \psi_4; \end{aligned}\right\} \tag{224}$$

$$\left.\begin{aligned} X_4(\chi_1) &= -(\psi_1 + \psi_2) - (\psi_3 - \psi_4)^2, \\ X_4(\chi_2) &= -(\psi_3 - \psi_4), \\ X_4(\chi_3) &= \psi_3 - \psi_4, \end{aligned}\right\} \tag{225}$$

то:

$$\left.\begin{aligned} Z(\chi_1) &= -\chi_2 + \chi_3, \\ Z(\chi_2) &= -1, \\ Z(\chi_3) &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{226}$$

Подберем функцию:

$$\theta(\chi_1, \chi_2, \chi_3) \tag{227}$$

таким образом, чтобы:

$$Z(\theta) = \frac{\partial\theta}{\partial\chi_1}(\chi_3 - \chi_2) - \frac{\partial\theta}{\partial\chi_2} + \frac{\partial\theta}{\partial\chi_3} = 0. \tag{228}$$

$$\frac{d\chi_1}{\chi_3 - \chi_2} = \frac{d\chi_2}{-1} = \frac{d\chi_3}{1}. \tag{229}$$

Выражения:

$$
\left.
\begin{aligned}
v_1 &= \chi_2 + \chi_3 = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\psi_3 - \psi_4} + \psi_3 + \psi_4 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\varphi_3 - \varphi_4} + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5, \\
v_2 &= (\chi_3 - \chi_2)^2 - 4\chi_1 = \left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{\psi_3 - \psi_4} + \psi_3 - \psi_4\right)^2 - 4\psi_1 + \\
&\quad + 4(\psi_3 - \psi_4)\psi_4 = \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\varphi_3 - \varphi_4} + \varphi_3 - \varphi_4 + \varphi_5\right)^2 - \\
&\quad - 4\left[\varphi_1 - \varphi_4\varphi_5 - (\varphi_3 - \varphi_4)\varphi_4\right]
\end{aligned}
\right\} \qquad (230)
$$

представляют независимые интегралы данной системы:

$$X_1(f) = 0, \quad X_2(f) = 0, \quad X_3(f) = 0, \quad X_4(f) = 0. \qquad (231)$$

Систему (202) легко записать в форме Jacobi'евоей системы, но этого делать незачем.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG DER RAMANUJAN'SCHEN IDENTITÄTEN

Von N. KOŠLĬAKOV (N. Koschliakov)

(Présenté par I. Vinogradov, *membre de l'Académie des Sciences)*

§ **1. Einleitung.** In «Collected Papers of Srinivasa Ramanujan»* findet sich eine ganze Reihe der interessanten Identitäten, z. B.:

$$(1)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{13}}{e^{2\pi n}-1}=\frac{1}{24};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{2\pi n}-1}=\frac{1}{24}-\frac{1}{8\pi};$$

$$(2)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{4m+1}}{ch\,(2n-1)\frac{\pi}{2}}=0 \text{ u. s. w.}$$

Neuerdings hat H. Watson gezeigt,** dass die beiden ersten Formeln als Spezialfälle einer allgemeineren Identität

$$(3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{4m+1}}{e^{2\pi n}-1}=\frac{B_{2m+1}}{8m+4}+\varepsilon_m$$

erscheinen, wo

$$\varepsilon_m=0 \text{ bei } m>0,\ \varepsilon_0=-\frac{1}{8\pi}$$

und B_{2m+1} die $(2m+1)$-te Bernoullische Zahl bezeichnet.

Es ist leicht zu ersehen, dass in diesen Identitäten die Funktion

$$\sigma_0(x)=\frac{1}{e^{2\pi x}-1}$$

* Collected Papers of S. Ramanujan. Cambridge, 1927.

** Journal of the London Mathem. Soc., vol. 3, part 3, pp. 2, 19.

eintritt, und dass letztere im Bereiche ihrer Pole in die Reihe

$$\sigma_0(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi x} + \frac{x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2} \tag{4}$$

entwickelbar ist.

In diesem Aufsatz will ich die analogen Identitäten für die Summen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, n^{4m+1}\, \sigma(n) \tag{5}$$

beweisen, wo $a(n)$ eine bestimmte arithmetische Funktion (z. B. die Anzahl der Teiler n) bedeutet und $\sigma(x)$ eine meromorphe, im Bereiche ihrer Pole in eine Reihe der Form (4) entwickelbare Funktion ist.

§ **2. Aufstellung der Hilfsformeln.** In meinem Aufsatz «Über die Summenformeln in quadratischen Zahlkörpern»* behandelte ich folgende Aufgabe.

Es seien Ω ein algebraischer Zahlkörper x-ten Grades mit der Grundzahl Δ; r_1—die Anzahl der zu Ω konjugierten reellen Körper, r_2—die halbe Anzahl der imaginären: es ist dann

$$x = r_1 + 2r_2 \quad (1 \leqslant x \leqslant 2).$$

Es sei a_n eine arithmetische, der Bedingung

$$|a_n| = 0\,(n^{\eta})$$

genügende Funktion, wo η eine willkürlich kleine positive Grösse bedeutet.

Man betrachte zwei Funktionen $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ einer komplexen Veränderlichen $s = \tau + it$, die mittels absolut konvergenter Dirichlet'scher Reihen

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n^{\,s}}, \quad R(s) > 1, \tag{6}$$

$$\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{l_n^{\,s}}, \quad R(s) > 1, \tag{7}$$

angegeben ist.

* Recueil Math. (Moskau), 1928, XXXV, 2.

Die Koeffizienten a_n und b_n sind miteinander durch die Transformationsformel

$$(8)\qquad a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_{r_1, r_2}\left(\frac{\lambda_n \rho}{A}\right) = \frac{1}{\rho}\left\{b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n X_{r_1, r_2}\left(\frac{l_n}{A\rho}\right)\right\}$$

verbunden, wo

$$(9)\qquad A = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2^{r_2} \cdot \pi^{\frac{x}{2}}},$$

a_0, b_0 sind Konstanten und die Funktion $X_{r_1, r_2}(x)$ ist durch das

$$R(s) > 0$$

absolut konvergente Integral

$$(10)\qquad \int_0^{\infty} X_{r_1, r_2}(x)\, x^{s-1}\, dx = \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)$$

gegeben.

Man soll unter diesen Bedingungen die Funktionen $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ auf der ganzen Ebene $s = \tau + it$ untersuchen.

Im erwähnten Aufsatz habe ich gezeigt wie man eine solche Funktion der komplexen Veränderlichen s, die in den Punkten λ_j $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ einfache Pole mit den Residuen a_j besitzt, erzeugen kann.

Bilden wir nämlich eine neue Funktion

$$(11)\qquad \sigma(x) = \frac{1}{A\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n K_{r_1, r_2}\left(\frac{l_n x}{A^2}\right),$$

wo die Funktion $K_{r_1, r_2}(x)$ mittels eines absolut konvergenten Integrals

$$(12)\qquad \int_0^{\infty} K_{r_1, r_2}(x)\, x^{s-1}\, dx = \frac{\pi}{2 \cos \frac{s\pi}{2}} G(1 - s), \quad R(s) > 0$$

bestimmt ist und

(13) $$G(s)=\frac{\Gamma^{r_1}\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(1-s)}{\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)}.$$

Damals habe ich folgendes bewiesen.

Die Reihe (11) im Gebiete

$$x>x_0>0,$$

wo x_0 beliebig klein ist, absolut und gleichmässig konvergent ist.

Für alle komplexen Werte von x mit $R(x)>0$ gestattet, die Funktion $\sigma(x)$ die Entwickelung in eine Reihe rationaler Brüche

(14) $$\sigma(x)=a+\frac{b}{x}+\frac{x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{x^2+\lambda_n^2},$$

wo

(15) $$a=-\frac{1}{2}\frac{b_0}{A\pi^{\frac{r_1}{2}}},\quad b=\frac{1}{2}\frac{a_0 a'}{\pi},$$

a' bedeutet eine konstante Grösse, die wir später bestimmen werden.

Aus der letzten Formel sieht man, dass die Funktion $2\pi i\,\sigma(iz)$ eine unendliche Folge der einfachen Pole mit den Residuen a_j in den Punkten λ_j besitzt.

Merken wir noch, dass die Funktion $\sigma(x)$ folgende Eigenschaft hat: bei der unendlichen Vergrösserung von x strebt das Produkt

(16) $$x^s\,\sigma(x)$$

gegen Null bei jedem Werte von s.

Mit Hilfe der Funktion $\sigma(x)$ habe ich die analytischen Eigenschaften der Funktionen $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ auf der ganzen Ebene der komplexen Veränderlichen s untersucht. Ich habe nämlich die folgende Formel

(17) $$\varphi(s)=\frac{b_0}{A\pi^{\frac{r_1}{2}}}\frac{\alpha^{1-s}}{s-1}+\int_{\alpha}^{\alpha+i\infty}\frac{\sigma(iz)}{z^s}\,dz+\int_{\alpha}^{\alpha-i\infty}\frac{\sigma(-iz)}{z^s}\,dz,\quad 0\leqslant\alpha<\lambda_1$$

bewiesen.

Aus dieser Formel folgt, dass die Funktion $\varphi(s)$ eine eindeutige analytische Funktion, mit dem einzigen singulären Punkte $s=1$ als Pol erster Ordnung mit dem Residuum

$$\frac{b_0}{A\pi^{\frac{r_1}{2}}}$$

ist.

Die Formel (17) gibt noch folgenden Ausdruck für die Funktion $\varphi(s)$:

(18) $$\varphi(s)=2\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^\infty \frac{\sigma(x)}{x^s}\,dx, \quad R(s)<0.$$

Daraus sieht man, dass die Funktion $\varphi(s)$ eine unendliche Folge der Nullstellen

$$-2,\ -4,\ -6,\ \ldots$$

hat.

Endlich folgt aus den Formeln (11) und (12)

(19) $$\int_0^\infty \frac{\sigma(x)}{x^s}\,dx=\frac{A^{1-2s}}{2\sin\frac{\pi s}{2}}G(s)\psi(1-s), \quad R(s)<0.$$

Daraus sieht man, dass zwischen den Funktionen $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ die Funktionalgleichung

(20) $$\varphi(s)=A^{1-2s}G(s)\psi(1-s)$$

besteht.

Zeigen wir noch einige notwendigen Eigenschaften der Funktion $\sigma(s)$.

Es sei m eine willkürliche ganze positive Zahl oder Null, a eine konstante Zahl, die die Ungleichung

(21) $$4m+2<a<4m+3$$

befriedigt und

(22) $$0<\alpha=a-4m-2<1.$$

Dann haben wir, für alle Werte von s, die der Bedingung

(23) $$-\alpha \leqslant R(s) \leqslant a$$

genügen,

(24) $$\frac{\varphi(1-s)}{2\cos\frac{\pi s}{2}} = \frac{b}{s(s-1)} + \vartheta \cdot \frac{A}{s},$$

wo $|\vartheta| < 1$ und A eine konstante, von s unabhängige Grösse, bedeutet.

In der Tat, schreiben wir die Relation (18) in der Form:

(25) $$\frac{\varphi(1-s)}{2\cos\frac{\pi s}{2}} - \frac{a}{s} - \frac{b}{s-1} =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \sigma(x) - a - \frac{b}{x} \right\} x^{s-1}\, dx + \int_1^\infty \sigma(x)\, x^{s-1}\, dx.$$

Es ist leicht zu ersehen, dass die beiden Teile der Gleichuug (25), wenn die einzige Bedingung $R(s) > -1$ erfüllt ist, stattfinden. Also haben wir die Formel

(26) $$\frac{\varphi(1-s)}{2\cos\frac{\pi s}{2}} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s-1} + \int_0^1 \left\{ \sigma(x) - a - \frac{b}{x} \right\} x^{s-1}\, dx + \int_1^\infty \sigma(x)\, x^{s-1}\, dx,$$

die für alle Werte von s, die der Bedingung

(27) $$R(s) > -1$$

genügen, gilt.

Aus dieser Formel ist klar, dass

(28) $$b = -\frac{\varphi(0)}{\pi}$$

ist, von anderer Seite

$$b = \frac{1}{2}\frac{a_0 a'}{\pi}$$

ist; daraus folgt

(29) $$a' = -\frac{2\varphi(0)}{a_0}.$$

Integrieren wir jetzt die rechte Seite der Gleichung (26) teilweise und berücksichtigen dabei die Eigenschaft des Produktes (16), dann können wir leicht zeigen, dass, wenn $R(s) > -1$ ist, die Gleichung

$$\frac{\varphi(1-s)}{2\cos\frac{\pi s}{2}} = -\frac{\varphi(0)}{\pi}\frac{1}{s(s-1)} - \frac{1}{s}\int_0^1 x^s d\left\{\sigma(x) - \frac{b}{x}\right\} - \frac{1}{s}\int_1^\infty x^s d\sigma(x)$$

stattfindet.

Nehmen wir jetzt an, dass die Veränderliche s die Ungleichungen (23) befriedigt, dann mit Hilfe der Ungleichungen

$$\left|\int_0^1 x^s d\left\{\sigma(x) - \frac{b}{x}\right\}\right| < \int_0^1 x^{-\alpha}\left|d\left\{\sigma(x) - \frac{b}{x}\right\}\right|,$$

$$\left|\int_1^\infty x^s d\sigma(x)\right| < \int_1^\infty x^a\left|d\sigma(x)\right|,$$

bekommen wir

$$\frac{\varphi(1-s)}{2\cos\frac{\pi s}{2}} = -\frac{\varphi(0)}{\pi}\cdot\frac{1}{s(s-1)} + \vartheta\cdot\frac{A}{s}, \quad |\vartheta| < 1,$$

wo die konstante Zahl A durch die Formel

$$\int_0^1 x^{-\alpha}\left|d\left\{\sigma(x) - \frac{b}{x}\right\}\right| + \int_1^\infty x^a\left|d\sigma(x)\right| = A$$

bestimmt ist.

Hiermit ist die Formel (24) bewiesen.

§ **3.** **Verallgemeinerung der Ramanujan'schen Identitäten.** Dafür benutzen wir folgende Integraldarstellung der Funktion $\sigma(x)$:

$$\text{(30)} \qquad \sigma(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{\varphi(1-s)}{2\cos\frac{s\pi}{2}}\frac{ds}{x^s}, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}, \quad a_0 > 1$$

die aus der bekannten Mellin'schen Umkehrformel folgt.

Es sei a eine bestimmte Konstante, die der Bedingung (21) genügt. Dann, da die Dirichlet'sche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^{s-4m-1}}$$

auf der Geraden $a = R(s) > 4m + 2$ absolut konvergent ist, finden wir

$$(31) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{4m+1} \sigma(\lambda_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\varphi(1-s)\,\varphi(s-4m-1)}{2\cos\frac{\pi s}{2}}\, ds.$$

Betrachten wir jetzt das Rechteck $ABCD$ mit den Ecken in den Punkten:

$$A(a+it), \quad B(-\alpha+it),$$
$$C(-\alpha-it), \quad D(a-it),$$

wo

$$\alpha = a - 4m - 2.$$

Innerhalb dieses Rechtecks enthalten sich die folgenden Pole des Integrands (31):

$$s = 0, \quad s = 4m + 2,$$

dabei gibt es für $m = 0$ noch ein Pol $s = 1$.

Wenn wir das Integral

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCD} \frac{\varphi(1-s)\,\varphi(s-4m-1)}{2\cos\frac{s\pi}{2}}\, ds$$

betrachten, so haben wir nach dem Cauchy'schen Satze für $m > 0$:

$$(32) \qquad I = -\frac{b_0}{A\pi^{\frac{r_1}{2}}}\,\varphi(-4m-1) = -\frac{b_0 A^{8m+2}}{\pi^{\frac{r_1}{2}}} \cdot \frac{\psi(4m+2)}{G(4m+2)}.$$

Untersuchen wir jetzt die beiden Teile des Integrals I, längs den Strecken AB und CD genommene, wo $s = \tau + it$ und

$$-\alpha \leqslant \tau \leqslant a.$$

Für diesen Zweck betrachten wir die Funktion $\varphi(1-s)$, die ins Integrand (31) hineintritt.

Auf der Geraden $\tau = -\alpha$, wegen der absoluten Konvergenz der Reihe (6) ist die Funktion $\varphi(1-s)$ beschränkt, d. h.

$$\varphi(1-s) = 0(1).$$

Für die Abschätzung der Funktion $\varphi(1-s)$ auf der Geraden $\tau = a$ nehmen wir die Funktionalgleichung (20), woraus mit Hilfe der Gleichung

$$G(1-s) = 0\left(|t|^{x\left(a-\frac{1}{2}\right)}\right)$$

folgt, dass

$$\varphi(1-s) = 0\left(|t|^{x\left(a-\frac{1}{2}\right)}\right)$$

für $\tau = a$.

Weiter folgt aus der Formel (24), dass es zwei solche Zahlen $T > 0$ und $\gamma > 0$ gibt, dass für alle Werte τ und t, die den Ungleichungen

$$-\alpha \leqslant \tau \leqslant a, \quad |t| \geqslant T$$

genügen, die Funktion $\varphi(1-s)$ regulär und von der Ordnung

$$0\left(e^{|t|^{\gamma}}\right)$$

st.

Daraus auf Grund des bekannten Phragmén-Lindelöf'schen Satzes haben wir

$$\varphi(1-s) = 0\left(|t|^{x\left(a-\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$-\alpha \leqslant \tau \leqslant a; \quad -T \leqslant t \leqslant T;$$

dabei ist diese Gleichung gleichmässig in τ befriedigt.

Es ist leicht zu sehen, dass

$$\varphi(s-4m-1) = 0\left(|t|^{x\left(a-\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$-\alpha \leqslant \tau \leqslant a; \quad -T \leqslant t \leqslant T$$

und folglich

$$\frac{\varphi(1-s)\,\varphi(s-4m-1)}{2\cos\frac{s\pi}{2}} = 0\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\,|t|^{x(2a-1)}\right).$$

Daraus ist klar, dass

(33) $$\lim_{t\to\infty}\int_{AB}\frac{\varphi(1-s)\,\varphi(s-4m-1)}{2\cos\frac{s\pi}{2}}\,ds =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\int_{CD}\frac{\varphi(1-s)\,\varphi(s-4m-1)}{2\cos\frac{\pi s}{2}}\,ds = 0.$$

Von anderer Seite machen wir in dem Integrale

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{BC}\frac{\varphi(1-s)\,\varphi(s-4m-1)}{2\cos\frac{s\pi}{2}}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha+i\infty}^{-\alpha-i\infty}\frac{\varphi(1-s)\,\varphi(s-4m-1)}{2\cos\frac{s\pi}{2}}\,ds$$

die Substitution

$$s = 4m + 2 - \sigma;$$

dann haben wir

(34) $$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{BC}\frac{\varphi(1-s)\,\varphi(s-4m-1)}{2\cos\frac{s\pi}{2}}\,ds =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{DA}\frac{\varphi(1-\sigma)\,\varphi(\sigma-4m-1)}{2\cos\frac{\pi\sigma}{2}}\,d\sigma.$$

Daraus in Betracht auf die Gleichungen (31), (32), (33) und (34) finden wir die gesuchte Identität

(35) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{4m+1}\,\sigma(\lambda_n) = -\frac{b_0\,A^{8m+2}}{2\pi^{\frac{r_1}{2}}}\,\frac{\psi(4m+2)}{G(4m+2)}, \qquad m>0.$$

Bei $m=0$ muss man noch den Pol $s=1$ in Betracht nehmen und dann erhält man folgendes Resultat

(36) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n\,\sigma(\lambda_n) = -\frac{b_0\,A^2}{2\pi^{\frac{r_1}{2}}}\,\frac{\psi(2)}{G(2)} - \frac{\varphi^2(0)}{2\pi}.$$

§ 4. **Untersuchung der speziellen Fälle.** Nehmen wir erstens den rationalen Zahlkörper, wenn

$$r_1 = 1,\ r_2 = 0,\ A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

und

$$X_{1,0}(x) = 2e^{-x^2}, \quad K_{1,0}(x) = \sqrt{\pi}\, e^{-2x}, \quad b_0 = -\frac{2\psi(0)}{\sqrt{\pi}}.$$

Die Identitäten (35) und (36) haben im betrachteten Falle die folgenden Ausdrücke

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{4m+1} \sigma(\lambda_n) = -\frac{2\psi(0)(4m+1)!}{(2\pi)^{4m+2}}\, \psi(4m+2), \qquad m > 0 \tag{37}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n \sigma(\lambda_n) = -\frac{\psi(0)\psi(2)}{2\pi^2} - \frac{\varphi^2(0)}{2\pi}. \tag{38}$$

Bei

$$\lambda_n = l_n = n; \quad \varphi(s) = \psi(s) = \zeta(s),$$

wo $\zeta(s)$ die Riemann'sche Funktion ist, erhalten wir Ramanujan'schen Identitäten.

Untersuchen wir jetzt den Fall des imaginären quadratischen Zahlkörpers. In diesem Falle haben wir

$$r_1 = 0; \quad r_2 = 1; \quad A = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\pi}; \quad b_0 = -\psi(0) \neq 0$$

und

$$X_{0,1}(x) = e^{-x}; \quad K_{0,1}(x) = i\{K_0(2\varepsilon\sqrt{x}) - K_0(2\eta\sqrt{x})\},$$

wo

$$\varepsilon = e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad \eta = e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

und $K_0(x)$ die bekannte Makdonaldische Funktion

$$K_0(2\sqrt{z}) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\tau - \frac{z}{\tau}} \frac{d\tau}{\tau}.$$

bezeichnet.

Da $G(4m+2)=\infty$, so ist

(39) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{4m+1} \sigma(\lambda_n) = 0, \qquad m > 0$$

und

(40) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n \sigma(\lambda_n) = -\frac{\varphi^2(0)}{2\pi}.$$

Es sei

$$\Delta = b'^2 - 4a'c' < 0$$

die Diskriminante einer primitiven definiten quadratischen Form und

$$a_n = b_n = F(n) = \sum_{\frac{d}{n}} (\Delta, d),$$

wo (Δ, d) das Dedekind'sche Symbol bedeutet, d. h.

es ist $(\Delta, d) = -1$, wenn d in Ω unzerlegbar ist;
» $(\Delta, d) = +1$, wenn d in zwei verschiedene konjugierte Primideale zerfällt;
» $(\Delta, d) = 0$, wenn d das Quadrat eines Primideals ist.

Dann folgt

$$\varphi(s) = \psi(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s} = \zeta_{\Omega}(s),$$

wo $\zeta_{\Omega}(s)$ die Dedekind'sche Funktion des quadratischen Körpers ist.

In diesem Falle haben wir

$$a_0 = b_0 = -\zeta_{\Omega}(0) = \frac{h}{2},$$

wo h die Kassenzahl bedeutet. Im Falle des Gauss'schen Körpers $(\Delta = -4)$ und des Jacobi-Eisenstein'schen Körpers $(\Delta = -3)$ ist

$$h = \frac{1}{2} \text{ und } h = \frac{1}{3}.$$

Im betrachteten Falle haben wir folgende Identität:

$$(41) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} F(n)\, n\, \sigma(n) = -\frac{h^2}{8\pi}.$$

Untersuchen wir noch den Fall des reellen quadratischen Zahlkörpers, wenn

$$r_1 = 2; \quad r_2 = 0; \quad A = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}; \quad \psi(0) = 0; \quad b_0 = -4\psi'(0)$$

und

$$X_{2,0}(x) = 4K_0(2x), \quad K_{2,0}(x) = 2\left\{K_0(4\varepsilon\sqrt{x}) + K_0(4\eta\sqrt{x})\right\}.$$

In diesem Fall haben wir

$$(42) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{4m+1} \sigma(\lambda_n) =$$

$$= -\frac{2\psi'(0)\,[(4m+1)!]^2}{\pi^2}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\right)^{8m+2} \psi(4m+2), \qquad m > 0$$

und

$$(43) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n \sigma(\lambda_n) = -\frac{\Delta\,\psi'(0)\,\psi(2)}{2\pi^4} - \frac{\varphi^2(0)}{2\pi}.$$

Im partikulär, wenn

$$\Delta = b'^2 - 4a'c' > 0, \quad a_n = b_n = F(n)$$

und

$$\varphi(s) = \psi(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s} = \zeta_\Omega(s)$$

die Dedekind'sche Funktion ist, haben wir

$$a_0 = b_0 = -4\zeta'_\Omega(0) = h \log \varepsilon,$$

wo h die Klassenzahl bedeutet und

$$\varepsilon = \frac{T + U\sqrt{\Delta}}{2},$$

wo T und U die kleinsten positiven Lösungen der Pell'schen Gleichung

$$T^2 - U^2\Delta = +4$$

sind.

Setzen wir voraus, dass $a_n = \tau(n)$ — die Anzahl der Teiler n ist. Dann müssen wir die Funktion

$$(44)\qquad \sigma(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\left\{K_0(4\pi\varepsilon\sqrt{nx}) + K_0(4\pi\eta\sqrt{nx})\right\}$$

in Betracht nehmen.

In meinem Artikel «On Voronoï's sum-formula»* habe ich die folgende Entwickelung

$$(45)\qquad \sigma(x) = -C - \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{4\pi x} + \frac{x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{x^2+n^2}$$

bewiesen.

Analogisch zeigen wir dass

$$(46)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\, n^{4m+1}\sigma(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\zeta^2(1-s)\,\zeta^2(s-4m-1)}{2\cos\frac{s\pi}{2}}\,ds,$$

wo

$$4m+2 < a < 4m+3, \qquad m > 0$$

und $\zeta(s)$ die Riemann'sche Funktion ist.

Daraus folgt die Formel

$$(47)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\, n^{4m+1}\sigma(x) =$$

$$= \zeta^2(-4m-1)\left\{\log 2\pi - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{4m-1} - \frac{\zeta'(4m+2)}{\zeta(4m+2)}\right\},$$

wo

$$\zeta(-4m-1) = -\frac{B_{2m+1}}{4m+2}, \quad \zeta(4m+2) = \frac{(2\pi)^{4m+2}B_{2m+1}}{2.(4m+2)!}.$$

Bei $m = 0$ haben wir

$$(48)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\, n\,\sigma(n) = \frac{1}{4}\left\{\log 2\pi - \frac{9}{8} - \frac{6}{\pi^2}\zeta'(2)\right\}.$$

---

* Messenger of Mathematics, vol. LVIII, № 2, 1928.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПОЛИНОМОВ С. Н. БЕРНШТЕЙНА ЗА ПРЕДЕЛАМИ ОСНОВНОГО ИНТЕРВАЛА

Л. В. КАНТОРОВИЧА

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

Акад. С. Н. Бернштейном* была установлена следующая теорема: Если $f(x)$ функция непрерывная в промежутке $(0,1)$ и если положить:

$$(1) \qquad P_n[f(x)] = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

то последовательность полиномов $P_n(x)$ равномерно сходится, в промежутке $(0,1)$, к функции $f(x)$:

$$(2) \qquad f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x).$$

Задачей настоящей работы является исследование области сходимости последовательности полиномов $P_n(x)$ на плоскости комплексного переменного. В теореме I мы даем непосредственное доказательство сходимости последовательности (1) к функции $f(x)$ на всей плоскости в том случае, когда функция $f(x)$ целая. В теореме II, пользуясь известным результатом об области сходимости разложения по полиномам Чебышева, мы уста-

* S. Bernstein. Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. Сообщ. Харьк. мат. общ. сер. II, т. XXIII № 1 и диссертация: О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов. Ibid., № 4—5, добавл. к гл. V., стр. 120—126.

навливаем, что в этой же области к $f(x)$ сходится и последовательность (1). Наконец, в теоремах III и IV мы даем доказательство того, что сходимость последовательности (1) за пределами основного интервала имеет место и в том случае, когда функция $f(x)$ носит аналитический характер и регулярна лишь на части этого промежутка.

Для проведения формальных преобразований в теореме I нам понадобится следующее вспомогательное предложение:

Лемма. *Если положить:*

$$P_{n,\nu}=\sum_{l=0}^{n} C_n^{\,l}(-1)^l l^\nu,$$

то: 1) *при* $\nu \geqslant n$; $|P_{n,\nu}| < 2^n n^\nu$ 2) *при* $\nu < n$; $P_{n,\nu}=0$.

Не останавливаясь на доказательстве этого элементарного предложения переходим к изложению первой теоремы:

Теорема I. *Если $f(x)$ целая функция, то последовательность полиномов Бернштейна* (1) *сходится к ней на всей плоскости и сходимость равномерная в любой конечной замкнутой области.*

Доказательство. Покажем, что соотношение (2) имеет место в круге $|x| < R$; для этого достаточно показать, что полиномы $P_n(x)$ равномерно ограничены в этом круге.

Так как $f(x)$ целая функция, то она разлагается в ряд:

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, \tag{3}$$

при этом числа a_j убывают быстрее любой прогрессии, а потому можно указать такое постоянное число K, чтобы для всех j выполнялось неравенство

$$|a_j| < \frac{K}{(2eR+1)^j}. \tag{4}$$

Составим теперь n-й полином Бернштейна для функции $f(x)$ преобразуем его тождественно и оценим затем в круге $|x| \leqslant R$. Имеем:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(\frac{k}{n}\right)^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{n^j} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} k^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{n^j} \sum_{k=0}^{n} C_n^k k^j x^k \sum_{s=0}^{n-k} C_{n-k}^s (-1)^s x^s.$$

Беря за новые индексы суммирования $m = k + s$ и k получаем:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{n^j} \sum_{m=0}^{n} x^m \sum_{k=0}^{m} C_n^k k^j C_{n-k}^{m-k} (-1)^{m-k}.$$

Замечая далее, что

$$C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_n^m C_m^k,$$

находим:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{n^j} \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (-1)^m \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^k k^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{n^j} \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (-1)^m P_{m,j}.$$

По свойству 2) чисел $P_{m,j}$ (см. лемму) видим, что слагаемые второй суммы при $m > j$ обращаются в ноль, а потому:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{n^j} \sum_{m=0}^{\min[j,\, n]} x^m (-1)^m C_n^m P_{m,j}. \tag{5}$$

Оценим теперь $|P_n(x)|$ в круге $|x| \leqslant R$ пользуясь свойством (1) чисел $P_{m,j}$ и неравенством (4)

$$|P_n(x)| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \sum_{m=0}^{\min[j,\,n]} \frac{|x|^m}{n^{j-m}} \frac{n \ldots (n-m+1)}{n^m} \frac{m^j}{m!} 2^m \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \sum_{m=0}^{\min(j,\,n)} R^m 2^m \frac{m^m}{m!} \left(\frac{m}{n}\right)^{j-m},$$

так как $m \leqslant n$, то вторая дробь под знаком суммы < 1, а первая по неравенству Стирлинга $m^m < e^m m!$ не превосходит e^m, таким образом:

$$|P_n(x)| < \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \sum_{m=0}^{\min(j,\,n)} (2Re)^m \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \frac{Kj\,(2Re)^j}{(2eR+1)^j} = S(R).$$

Последний полученный ряд сходится и сумма его есть некоторое постоянное число зависящее только от R. Итак, все полиномы $P_n(x)$ в круге $|x| \leqslant R$ ограничены одним и тем же числом $S(R)$ и на промежутке (0,1) по теореме С. Н. Берштейна сходятся к $f(x)$, в таком случае по известной теореме Vitali о последовательностях аналитических функций они сходятся к $f(x)$ равномерно во всем круге $|x| \leqslant R$, откуда следуют заключения теоремы.

Перейдем теперь к случаю произвольной аналитической функции $f(x)$, именно покажем следующее предложение:

Теорема II. *Если функция $f(x)$ регулярна вплоть до контура в некотором эллипсе (C) с фокусами* (0,1), *то последовательность полиномов Бернштейна сходится равномерно в этом эллипсе к функции $f(x)$.*

Доказательство. Обозначим через $T_k(x)$ k-й полином Чебышева промежутка (0,1) и через L_k и M_k верхнюю границу $|T_k(x)|$ в промежутке (0,1) и на контуре (C).

Обозначим через $\pi_n^{(k)}(x)$ n-й полином Бернштейна для $T_k(x)$, т. е.

$$(6) \qquad \pi_n^{(k)}(x) = P_n[T_k(x)] = \sum_{s=0}^{n} C_n^s x^s (1-x)^{n-s}\, T_k\left(\frac{s}{n}\right).$$

На промежутке (0,1) имеем:

$$|\pi_n^{(k)}(x)| \leqslant \sum_{s=0}^{n} C_n^s x^s (1-x)^{n-s} T_k\left(\frac{s}{n}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=0}^{n} C_n^s x^s (1-x)^{n-s} L_k = L_k.$$

Таким образом полином $\pi_n^{(k)}(x)$ степени не выше k* уклоняется от нуля на промежутке (0,1) не более чем $T_k(x)$; в таком случае, как известно, он должен иметь не большее уклонение и на эллипсе (C),** т. е.

(7) $$\max |\pi_n^{(k)}(x)| \leqslant M_k.$$

Известно далее, что функция $f(x)$ может быть разложена в эллипсе (C) в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по полиномам Чебышева:***

(8) $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k T_k(x).$$

При этом из характера сходимости ряда (8) вытекает и сходимость ряда:

(9) $$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| M_k = M.$$

Рассмотрим теперь n-й полином Бернштейна для $f(x)$, по (6) и (8)

$$P_n(x) = P_n[f(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} b_k P_n[T_k(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \pi_n^{(k)}(x).$$

* То, что полином $\pi_n^{(k)}(x)$ имеет степень не выше k при любом n получается сразу из (5). Действительно, если вместо $f(x)$ взять полином $T_k(x)$ k'ой степени, то j, а потому и m, не превзойдет k.

** Здесь мы пользуемся одним предложением, представляющим непосредственное следствие из теоремы Бернштейна (диссертация, стр. 61—62). Именно следующим: из всех полиномов имеющих данное уклонение на эллипсе с фокусами (α, β) наименее уклоняется от нуля в промежутке (α, β) полином Чебышева.

*** С. Н. Бернштейн. Диссертация, стр. 178; Ср. G. Faber. Über Tschebyscheffsche Polynome. Journ. f. d. reine u. ang. Math. Bd. 150, S. 79; спец. стр. 83 и 87.

Воспользовавшись теперь неравенством (7) имеем в эллипсе (C):

$$|P_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| M_k = M.$$

Таким образом, все полиномы $P_n(x)$ в эллипсе (C) ограничены по модулю одним и тем же числом, а потому пользуясь опять теоремой Vitali заключаем, что они равномерно сходятся к функции $f(x)$ в этом эллипсе.

Перейдем теперь к случаю функции $f(x)$ аналитической лишь на части интервала $(0,1)$.

Теорема III. *Если $f(x)$ функция заданная в промежутке $(0,1)$ ограниченная в этом промежутке и на части его, именно в некотором промежутке (λ_1, λ_2), совпадающая с функцией $\varphi(x)$ аналитической в промежутке $(0,1)$ и вблизи него, то последовательность полиномов Бернштейна для функции $f(x)$ будет сходиться в некоторой определенной области вблизи промежутка (λ_1, λ_2) к функции $\varphi(x)$.*

Доказательство. Функция $\varphi(x)$, согласно условиям теоремы, будет регулярна в некотором эллипсе (C) с фокусами $(0,1)$.

Рассмотрим две лемнискаты проходящие через точки λ_1 и λ_2:

$$(10) \qquad (L_1) \ \left|\frac{x}{\lambda_1}\right|^{\lambda_1} \left|\frac{1-x}{1-\lambda_1}\right|^{1-\lambda_1} = 1; \qquad (L_2) \ \left|\frac{x}{\lambda_2}\right|^{\lambda_2} \left|\frac{1-x}{1-\lambda_2}\right|^{1-\lambda_2} = 1.$$

Покажем, что сходимость полиномов $P_n(x)$ к функции $\varphi(x)$ имеет место в области D представляющей общую часть эллипса (C) и тех частей лемнискат (L_1) и (L_2), которые содержат промежуток (λ_1, λ_2).

Рассмотрим полиномы Бернштейна для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$:

$$(11) \qquad P_n(x) = P_n[f(x)] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right);$$

$$\pi_n(x) = P_n[\varphi(x)] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \varphi\left(\frac{k}{n}\right).$$

По теореме II при достаточно больших n имеем в эллипсе (C):

$$|\pi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \qquad (n > N).$$

Введем теперь интересующее нас выражение:

$$|P_n(x) - \varphi(x)| \leqslant |P_n(x) - \pi_n(x)| +$$

$$+ \varepsilon \leqslant \sum_{k=0}^{k<n\lambda_1} |C_n^k x^k (1-x)^{n-k}| \left(\left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + \left| \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right| \right) +$$

$$+ \sum_{k<n\lambda_2}^{n} |C_n^k x^k (1-x)^{n-k}| \left(\left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + \left| \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right| \right) +$$

$$+ \varepsilon \leqslant 2M \sum_{k<n\lambda_1} \left|\frac{x}{\lambda_1}\right|^k \left|\frac{1-x}{1-\lambda_1}\right|^{n-k} + 2M \sum_{k>n\lambda_2} \left|\frac{x}{\lambda_2}\right|^k \left|\frac{1-x}{1-\lambda_2}\right|^{n-k} + \varepsilon.$$

Здесь M обозначает верхнюю границу $|f(x)|$ и $|\varphi(x)|$ в $(0,1)$.

Нам нужно показать, что написанные суммы малы. Оценим, например, первую из них. Так как точка x внутри (L_1), то

$$\left|\frac{x}{\lambda_1}\right|^{\lambda_1} \left|\frac{1-x}{1-\lambda_1}\right|^{1-\lambda_1} = q < 1,$$

отсюда

$$q = \left|\frac{x}{\lambda_1}\right| \left(\left|\frac{1-x}{x}\right| \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1} \right)^{1-\lambda_1}$$

или

$$\left|\frac{1-x}{x}\right| \left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}\right) = \left(q \left|\frac{\lambda_1}{x}\right|\right)^{\frac{1}{1-\lambda_1}} = \tau < 1,$$

так как $|x| > \lambda_1$. Оценим теперь любое слагаемое первой суммы:

$$(12) \quad \left|\frac{x}{\lambda_1}\right|^k \left|\frac{1-x}{1-\lambda_1}\right|^{n-k} = q^n \left(\left|\frac{1-x}{x}\right| \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1} \right)^{\lambda_1 n-k} = q^n \tau^{\lambda_1 n-k} < q^n < 1.$$

Итак каждое слагаемое первой суммы и совершенно аналогично и второй суммы не превосходит q^n, таким образом правая часть неравенства не превосходит $(2Mnq^n + \varepsilon)$, т. е. сколь угодно мала, а потому в области D:

$$(13) \qquad \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \varphi(x).$$

В последней теореме мы поставили требование, чтобы функция $\varphi(x)$ была регулярна не только в промежутке (λ_1, λ_2), но и во всем промежутке $(0,1)$, теперь мы покажем, что от последнего ограничения можно освободиться.

Теорема IV. *Если $f(x)$ функция регулярная на промежутке $(\lambda_1 \lambda_2)$ и вблизи него $[0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant 1]$ и ограниченная на всем промежутке $(0,1)$, то последовательность полиномов $P_n(x)$ сходится к ней в некоторой области вблизи этого промежутка.*

Доказательство. Обозначим через $C_\rho [\rho > 1]$ эллипс с фокусами (λ_1, λ_2), у которого отношение суммы полуосей к фокальному расстоянию равно ρ. Положим $\rho(x) = \rho$ для точек лежащих на эллипсе C_ρ.

Так как функция $f(x)$ регулярна вблизи (λ_1, λ_2), то она будет регулярна и в некотором эллипсе C_{ρ_0}. Выберем теперь такое постоянное $A > 2$, чтобы при всех ξ не лежащих в промежутке $(\lambda_1 \lambda_2)$:

$$(14) \quad \left[\left(\frac{\lambda_1}{\xi}\right)^{\xi}\left(\frac{1-\lambda_1}{1-\xi}\right)^{1-\xi}\right]^A \cdot \rho(\xi) < \sqrt{\rho_0}; \quad \left[\left(\frac{\lambda_2}{\xi}\right)^{\xi}\left(\frac{1-\lambda_2}{1-\xi}\right)^{1-\xi}\right]^A \rho(\xi) < \sqrt{\rho_0},$$

как нетрудно видеть такое A можно найти, так как если ξ не совпадает с λ_1 или λ_2, то первый множитель меньше 1, а если совпадает, то оба обращаются в 1.

Положим теперь $\rho_1 = \rho_0^{\frac{1}{A}}$ и покажем, что полиномы $P_n(x)$ сходятся к $f(x)$ в области B, представляющей общую часть эллипса C_{ρ_1} и тех частей лемнискат (10), которые содержат промежуток (λ_1, λ_2).

Для этого нужно показать, что в указанной области полиномы (1) ограничены в совокупности. Достаточно показать это относительно полиномов

$$(15) \qquad \bar{P}_n(x) = \bar{P}_n[f(x)] = \sum_{\lambda_1 n \leqslant k \leqslant \lambda_2 n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

так как разность $\bar{P}_n(x) - P_n(x)$ в области ограниченной лемнискатами (10) сколь угодно мала при достаточно большом n, как это вытекает из рассуждений теоремы III.

Обозначим через $T_k(x)$ к-й полином Чебышева для промежутка (λ_1, λ_2); через L_k и $M_\rho^{(k)}$ верхнюю границу его модуля на промежутке (λ_1, λ_2) и на эллипсе C_ρ, тогда, как известно *

$$\frac{L_k}{2}\rho^k < M_\rho^{(k)} < L_k \rho^k. \tag{16}$$

Введем еще обозначения:

$$\pi_n^{(k)}(x) = P_n[T_k(x)]; \tag{17}$$

$$\overline{\pi}_n^{(k)}(x) = \overline{P}_n[T_k(x)] = \sum_{\lambda_1 n \leqslant s \leqslant \lambda_2 n} C_n^s x^s (1-x)^{n-s} T_k\left(\frac{s}{n}\right).$$

Отметим, что полином $\pi_n^{(k)}(x)$ не выше k-й степени, а полином $\overline{\pi}_n^{(k)}(x)$ на промежутке (λ_1, λ_2) не превосходит по модулю L_k. Оценим полином $\overline{\pi}_n^{(k)}(x)$ в области B.

Если $n < kA$, то полином $\overline{\pi}_n^{(k)}(x)$, который на (λ_1, λ_2) не превосходит L_k, на эллипсе C_{ρ_1}, а потому и в B не превзойдет, как известно,** следующей величины:

$$|\overline{\pi}_n^{(k)}(x)| < L_k \rho_1^n = L_k \rho_0^{\frac{n}{A}} \qquad [n < kA]. \tag{18}$$

Пусть $n \geqslant kA$. Оценим сначала в области B разность

$$\pi_n^{(k)}(x) - \overline{\pi}_n^{(k)}(x) = \sum_{s=0}^{s<\lambda_1 n} C_n^s x^s (1-x)^{n-s} T_k\left(\frac{s}{n}\right) +$$

$$+ \sum_{s>\lambda_2 n}^{n} C_n^s x^s (1-x)^{n-s} T_k\left(\frac{s}{n}\right).$$

* С. Н. Бернштейн, l. c., стр. 62. G. Faber, l. c., S. 85.

** Бернштейн, l. c., стр. 62. Мы пользуемся здесь следующим предложением: если $P(x)$ полином степени не выше n, который на промежутке (α, β) не превосходит L, то на эллипсе C с фокусами (α, β) она не превзойдет LR^n, где R отношение суммы полуосей (C) к его фокальному расстоянию.

Ограничиваясь, например, оценкой первой суммы, пользуясь (10), (12), (14) и (16) имеем

$$\left|\sum_{s=0}^{s<\lambda_1 n} C_n^s x^s (1-x)^{n-s} T_k\left(\frac{s}{n}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=0}^{s<\lambda_1 n} C_n^s \lambda_1^s (1-\lambda_1)^{n-s} \left|\frac{x}{\lambda_1}\right|^s \left|\frac{1-x}{1-\lambda_1}\right|^{n-s} \left|T_k\left(\frac{s}{n}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=0}^{s<\lambda_1 n} C_n^s \lambda_1^s (1-\lambda_1)^{n-s} \left|T_k\left(\frac{s}{n}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=0}^{s<\lambda_1 n} \frac{C_n^s \lambda_1^s (1-\lambda_1)^{n-s}}{C_n^s \left(\frac{s}{n}\right)^s \left(1-\frac{s}{n}\right)^{n-s}} L_k \left[\rho\left(\frac{s}{n}\right)\right]^k C_n^s \left(\frac{s}{n}\right)^s \left(1-\frac{s}{n}\right)^{n-s} =$$

$$= L_k \sum_{s=0}^{s<\lambda_1 n} \left\{\left[\left(\frac{\lambda_1}{\frac{s}{n}}\right)^{\frac{s}{n}} \left(\frac{1-\lambda_1}{1-\frac{s}{n}}\right)^{1-\frac{s}{n}}\right]^A \rho\left(\frac{s}{n}\right)\right\}^k \left[\left(\frac{\lambda_1}{\frac{s}{n}}\right)^{\frac{s}{n}} \left(\frac{1-\lambda_1}{1-\frac{s}{n}}\right)^{1-\frac{s}{n}}\right]^{n-kA} C_n^s \left(\frac{s}{n}\right)^s \left(1-\frac{s}{n}\right)^{n-s}$$

$$< L_k M k (\sqrt{\rho_0})^k .*$$

Наконец, принимая во внимание и вторую сумму, находим в B:

(19) $$|\pi_n^{(k)}(x) - \overline{\pi}_n^{(k)}(x)| < L_k k M_1 (\sqrt{\rho_0})^k \qquad [n > kA].$$

Так как $\overline{\pi}_n^{(k)}(x)$ не превосходит на (λ_1, λ_2) по модулю L_k, а

$$[\pi_n^{(k)}(x) - \overline{\pi}_n^{(k)}(x)]$$

выражения (19), то $\pi_n^{(k)}$ на (λ_1, λ_2) не превзойдет при $n > kA$:

(20) $$|\pi_n^{(k)}(x)| \leqslant L_k (k M_1 (\sqrt{\rho_0})^k + 1).$$

Благодаря этому, так как $\pi_n^{(k)}(x)$ полином степени не выше k, то на контуре C_{ρ_1}, а потому и в области B

(21) $$|\pi_n^{(k)}(x)| \leqslant L_k [k M_1 (\sqrt{\rho_0})^k + 1] \rho_1^k = L_k \left[k M_1 \rho_0^{k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{A}\right)} + \rho_0^{\frac{k}{A}}\right].$$

* M обозначает здесь некоторую постоянную, получающуюся от оценки двух последних множителей.

Далее из (19) и (21) находим, что при $n > kA$ в B справедлива оценка:

(22) $$|\overline{\pi}_n^{(k)}(x)| \leqslant |\pi_n^{(k)}(x)| + |\pi_n^{(k)}(x) - \overline{\pi}_n^{(k)}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant L_k \left[kM_1 \rho_0^{k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{A}\right)} + kM_1 \rho_0^{\frac{k}{2}} + \rho_0^{\frac{k}{A}} \right] < L_k k M_2 \rho_0^{k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{A}\right)}$$

При k достаточно большом $k > k_0$ это неравенство, так как $A > 2$, можно заменить другим:

(23) $$|\overline{\pi}_n^{(k)}(x)| \leqslant L_k \rho_0^k \qquad [n \geqslant kA;\ k > k_0].$$

Из (18) и (23) находим оценку верную при всех n и при $k > k_0$:

(24) $$|\overline{\pi}_n^{(k)}(x)| \leqslant L_k \rho_0^k.$$

Перейдем теперь к оценке $\overline{P}_n(x)$. Так как функция $f(x)$ регулярна в эллипсе C_{ρ_0}, то она разлагается в нем в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по полиномам Чебышева $T_k(x)$:

(25) $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k T_k(x),$$

причем в силу характера сходимости ряда (25) и неравенства (16) сходятся и ряды:

(26) $$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| M_{\rho_0}^{(k)} = M; \quad \sum_{k=0}^{\infty} L_k |b_k| \rho_0^k = R.$$

Тогда для $\overline{P}_n(x)$ в области B пользуясь (15), (17), (18), (22), (24), (25) и (26) найдем:

(27) $$|\overline{P}_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| |\overline{\pi}_n^{(k)}(x)| = \sum_{k=0}^{k_0} |b_k| |\overline{\pi}_n^{(k)}(x)| +$$

$$+ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |b_k| |\overline{\pi}_n^{(k)}(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{k_0} |b_k| L_k k M_2 \rho_0^k +$$

$$+ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |b_k| L_k \rho_0^k \leqslant k_0 M_2 L_{k_0} \rho_0^{k_0} \sum_{k=0}^{k_0} |b_k| + R,$$

т. е. что полиномы $\bar{P}_n(x)$, а потому и $P_n(x)$, ограничены в совокупности в области B. Отсюда пользуясь опять теоремой Vitali заключаем, что в области B полиномы $P_n(x)$ сходятся и $f(x)$.

Замечание I. Из последней теоремы вытекает, что, если $f(x)$ функция кусочно аналитическая, т. е. функция, которая на некотором промежутке (λ_1, λ_2) совпадает с аналитической функцией $f_1(x)$, на промежутке (λ_2, λ_3) с $f_2(x)$ и т. д., то последовательность полиномов $P_n(x)$ будет сходиться в различных областях к различным аналитическим функциям: вблизи (λ_1, λ_2) к $f_1(x)$, вблизи (λ_2, λ_3) к $f_2(x)$ и т. д. Заметим, что аналитического продолжения кусочно аналитических функций не дают другие известные разложения по полиномам, в частности разложения по ортогональным полиномам.

Замечание II. В теореме II было показано, что полиномы $P_n(x)$ сходятся к функции $f(x)$ в эллипсе C с фокусами $(0,1)$, в котором $f(x)$ регулярна. Для разложения по полиномам Чебышева наибольший такой эллипс является точной областью сходимости, для полиномов Бернштейна (1) это будет не так. Действительно, пусть $f(x)$ функция, имеющая особую точку вблизи промежутка $(0,1)$ $\left[\text{например } \frac{1}{x+0.01}\right]$, тогда указанный эллипс будет весьма близок к промежутку (0.1) [в примере эллипс (C) будет

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{0.2601}+\frac{y^2}{0.0101}=1\Bigg].$$

Между тем теорема IV гарантирует вполне определенную область сходимости вблизи промежутка (λ_1, λ_2), зависящую только от чисел λ_1, λ_2, ρ_0, которые можно не ставить в зависимость от положения особой точки, а потому эта область выйдет за пределы эллипса (C) лишь только особая точка будет достаточно близка к промежутку $(0,1)$. В примере можно принять:

$$\lambda_1=\frac{1}{3}; \quad \lambda_2=\frac{2}{3}; \quad \rho_0=5.8; \quad A=2.1; \quad \rho_1=2;$$

и за C_{ρ_1} эллипс

$$\frac{576}{25}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+64y^2=1.$$

Уравнения лемнискат будут:

$$x^{\frac{1}{3}}|1-x|^{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$$

и

$$|x|^{\frac{2}{3}}|1-x|^{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}.$$

Тогда, как легко проверить, точка $\frac{1}{2}+\frac{1}{9}i$ лежит вне C и внутри C_{ρ_1} и обеих лемнискат, т. е. внутри области B, а потому $P_n(x)$ сходятся вблизи нее к функции $f(x)$, т. е. эллипс (C) не является точной областью сходимости.

21 VI 1931.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles — Отделение математических и естественных наук

О ПРИРОДЕ СПИРТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ (ПЕРВИЧНОГО) ТЕТРАГИДРО-α-ФУРФУРИЛАМИНА С АЗОТИСТОЙ КИСЛОТОЙ

Н. В. ВИЛЬЯМСА

(*Представлено академиком* **Н. Я. Демьяновым**)

Как уже сообщалось ранее,[1] при изучении процесса взаимодействия первичного тетрагидро-α-фурфуриламина с азотистой кислотой, проведенного в целях выяснения способности к изомерному превращению гетероциклических аминов с боковой цепью CH_2NH_2, в соответствующие алкоголи с расширенным циклом, были получены фракции: одна (86.5—87° 25 мм), соответствующая по температуре кипения первичному тетрагидро-α-фурфуриловому алкоголю (1) и другая того же состава, но с высшей температурой кипения (93—95° 25 мм), по всей вероятности являющаяся изомерным шестичленным алкоголем (2). Наряду с образованием указанных алкоголей удалось доказать образование непредельной окиси, получившейся в результате дегидратации вторичного алкоголя.

```
                                    CH2
    CH2——CH2                       /   \
    |     |                      CH2   CH2
1.  CH2   CH.CH2OH          2.   |     |
      \  /                       CH2   CHOH
       O                           \  /
                                    O
```

Полученные изомерные алкоголи ($C_5H_{10}O_2$) обладали способностью медленно, но в достаточной степени интенсивно, окрашивать раствор фуксиносернистой кислоты и, при осторожном нагревании, давать металлическое зеркало с аммиачным раствором окиси серебра.

[1] ДАН-А, 1930, № 16, стр. 424.

Ввиду того, что вторичный шестичленный алкоголь, образование которого должно иметь место в случае перехода гидрофуранового ядра в гидропирановое, является окисной формой δ-окси-валерьянового альдегида, наличие альдегидных реакций у полученных продуктов является фактом, говорящим за то, что в данном случае процесс изомеризации имел место. Способность же фракции, соответствующей тетрагидро-α-фурфуриловому алкоголю реагировать с аммиачным раствором окиси серебра и фуксиносернистой кислотой, следует объяснить примесью к ней выше кипящего δ-окси-валерьянового альдегида, так как полученный первичный алкоголь обладал несколько повышенной температурой кипения (86.5—87° 25 мм), против приводимой (85—85° 26 мм), для него H. Wienhaus'ом,[1] впервые его получившим.

Для доказательства тождества природы фракции, кипящей при 93—95° 25 мм с δ-окси-валерьяновым альдегидом, были проведены опыты получения соответствующих производных, при чем фенилгидразон, оксим- и семикарбазон были выделены в виде маслянистых продуктов, закристаллизовать которые не удалось.

При нагревании же исследуемого продукта со спиртовым раствором парабромфенилгидразина, после разбавления раствора водой, было выделено желтовато-коричневатое масло, через сутки закристаллизовавшееся. Полученное вещество растворялось в этиловом эфире и добавлением петролейного эфира были выделены кристаллы темнокрасного цвета, плавящиеся при 70—71°, по данным элементарного анализа, оказавшиеся тождественными с парабромфенилгидразоном δ-окси-валерьянового альдегида.

Вещество 0.1196 г, CO_2 0.2140 г, H_2O 0.0584 г.
$C_{11}H_{15}ON_2Br$. Вычислено C 48.70%, H 5.57%
Найдено C 48.82 » , H 5.47 »

Таким образом описываемый δ-окси-валерьяновый альдегид, по свойствам его азотосодержащих производных, является весьма близким с изомерным γ-окси-валерьяновым альдегидом, первым из описанных γ-оксиальдегидов, полученных B. Helferich'ом,[2] путем озонирования метилгептенола и последующим восстановлением образовавшегося при озонировании метилгептенона.

[1] H. Wienhaus, Ber., Bd. 53, S. 1656—66 (1920).
[2] B. Helferich, Ber., Bd. 52, S. 1123 (1913).

В дальнейшем, в целях объяснения способности фракции, соответствующей первичному тетрагидро-α-фурфуриловому алкоголю, давать альдегидные реакции и доказательства присутствия в ней δ-окси-валерьянового альдегида, она подвергалась окислению кипячением с водной окисью серебра, в процессе которого по стенкам колбы образовалось прекрасное серебряное зеркало. После того, как осадок серебра и взятая в некотором избытке Ag_2O были отфильтрованы, из фильтрата вода и неизмененный первичный тетрагидро-α-фурфуриловый алкоголь отгонялись в вакууме, при чем в перегонной колбе выделилась хорошо кристаллизующаяся и стойкая серебряная соль δ-окси-валерьяновой кислоты.

Вещество 0.1282 г, Ag 0.0616 г
Вещество 0.1852 », CO_2 0.1799 », H_2O 0.0642 г $C_5H_9O_3Ag$
Вычислено C 26.66%, H 4.03%, Ag 47 97%
Найдено C 26.49 », H 3.88 », Ag 48.04 ».

1.62 г фракции, соответствующей первичному алкоголю при окислении дали 1.95 г серебряной соли, что соответствует при перерасчете на δ-окси-валерьяновый альдегид, 54%-м теоретического количества. Для выделения свободной δ-окси-валерьяновой кислоты, к водному раствору ее серебряной соли, добавлялась соляная кислота в количестве несколько превышающем теоретическое, выделившийся осадок хлористого серебра отфильтровывался и фильтрат после насыщения сернокислым аммонием многократно извлекался эфиром. Эфирная вытяжка сушилась прокаленной глауберовой солью и остаток, полученный после удаления эфира, перегонялся в вакууме, в результате чего получена жидкость, кипящая в пределах 107—112° 20 мм, с приятным запахом сложного эфира, имеющая кислую реакцию и обладающая следующими константами: d 19°—1.1153; nD 19° —1.4616.

Анализ вещества дал цифры, соответствующие смеси δ-окси-валерьяновой кислоты и ее лактона.

Вещество 0.1582 г CO_2 0.3285, H_2O 0.1177 г
$C_5H_{10}O_3$. Вычислено C 50.84%, H 8.47%
$C_5H_8O_2$. Вычислено C 60.00 », H 8.00 »
Найдено C 56.63 », H 8.32 ».

Кроме полученной смеси лактона и свободной кислоты, в приемник при перегонке перешло незначительное количество (0.13 г) выше кипящего вещества, при состоянии закристаллизовавшегося в белую сплошную массу,

по внешнему виду напоминающую плесень; по данным анализа полученное соединение отвечает составу $C_5H_8O_2$ и по всей вероятности является полимерной формой δ-валеролактона.

Вещество 0.0957. CO_2 0.2100 г, H_2O 0.0714 г
$(C_5H_8O_2)n$. Вычислено C 60.00%, H_2 8.00%
Найдено C 59.88 », H 8.34 ».

То, что полученная выше кипящая фракция, температуру кипения которой из-за недостатка материала установить не удалось, действительно является полимером δ-валеролактона, находит себе подтверждение в работе F. Fichter'a,[1] показавшего большую склонность описываемого лактона переходить при стоянии в кристаллическую, полимерную форму и получившего данный полимер при вакуум-перегонке δ-окси-валерьяновой кислоты.

Выделившаяся из серебряной соли смесь δ-окси-валерьяновой кислоты и ее лактона подвергалась окислению путем осторожного выпаривания, при 80—85°, с шестикратным количеством 30%-ой азотной кислоты до начала кристаллизации продуктов окисления.

По охлаждении кристаллы отфильтровывались, промывались холодной водой и окончательно очищались нагреванием с животным углем и повторной перекристаллизацией из воды. Кристаллы плавились при 182° и по своему составу отвечали янтарной кислоте.

Вещество 0.0554 г, CO_2 0.0826 г, H_2O 0.0261 г
$C_4H_6O_4$. Вычислено C 40.67%, H 5.12%
Найдено C 40.66 », H 5.27 »

Образование янтарной кислоты, при окислении азотной кислотой смеси δ-валерьяновой кислоты и ее лактона, вместо ожидаемой глутаровой, находит себе объяснение в работе Н. Я. Демьянова,[2] получившего янтарную кислоту окислением окиси пентаметиленгликоля, а также и в образовании ее при окислении целого ряда сложных органических веществ.

В результате вышеописанной переработки продукта, полученного при взаимодействии первичного тетра-гидро-α-фурфуриламина с азотистой кислотой по температуре кипения близко стоящего к первичному тетрагидро-α-фурфуриловому алкоголю, с несомненностью доказана примесь к нему,

[1] F. Fichter, Ber., Bd. 36, S. 1200 (1903).
[2] Н. Я. Демьянов, ЖРХО, т. 45, стр. 169—173.

в количестве не менее половинного, изомерного δ-окси-валерьянового альдегида, давшего при окислении соответствующую кислоту.

Таким образом, по отношению к процессу взаимодействия первичного тетра-гидро-α-фурфуриламина с азотистой кислотой, вышеприведенные факты позволяют сделать следующие выводы:

1) Способность циклических аминов полиметиленового ряда, содержащих n атомов углерода в цикле и боковую цепь CH_2NH_2, превращаться под влиянием азотистой кислоты в соединения с $n + 1$ атомами в цикле, следует распространить и на гетероциклические амины с боковой цепью CH_2NH_2, содержащих в цикле вместо одной группы CH_2, атом кислорода.

2) При разложении азотистокислой соли первичного тетра-гидро-α-фурфуриламина имеет место вышеуказанное расширение цикла, приводящее к образованию шестичленного алкоголя, являющегося окисной формой δ-окси-валерьянового альдегида, т. е. в данном случае осуществляется переход от пятичленного гидрофуранового ядра к шестичленному гидропирановому ядру.

3) Этот переход укладывается в нижеприводимую схему, предложенную ак. Демьяновым,[1] впервые открывшим закономерность этой изомерации:

1. $CH_2—CH_2$ | CH_2 $CH.CH_2NH_2$ (ядро замкнуто через O) → 2. $CH_2—CH$———N ‖ CH_2 $CH—CH_2—N$ (ядро замкнуто через O) →

3. $CH_2—CH$ | CH_2 CH (ядро замкнуто через O) $>CH_2 + H_2O$ →

4. CH_2 / CH_2 CH_2 | CH_2 $CHOH$ (ядро замкнуто через O) или 5. $CHOH$ / CH_2 CH_2 | CH_2 CH_2 (ядро замкнуто через O)

Кроме того, по аналогии с образованием непредельных углеводородов, наряду с алкоголями, из гомоциклических аминов, возможно образование окисей (6, 7, 8), строение которых определяется направлением дегидратации вторичных алкоголей (4, 5):

[1] Н. Я. Демьянов, ЖРФХО, реф. т. 33, стр. 279 (1901) и статьи т. 35, стр. 315 (1903).

6. CH_2 (вверху); CH_2 — CH; | ‖ ; CH_2 — CH; O (внизу)

7. CH (вверху); CH_2 — CH; | | ; CH_2 — CH_2; O (внизу)

8. CH (вверху); CH — CH_2; | | ; CH_2 — CH_2; O (внизу)

Причем из приведенных в схеме соединений строго доказано образование полуацетальной формы δ-окси-валерьянового альдегида (4), а следовательно и сам факт изомеризации, а также и непредельной окиси, строение которой за недостатком вещества установить не удалось. Вопрос об образовании алкоголя 5 (γ-форма) остается пока открытым, хотя, если бы удалось его обнаружить, то это могло бы служить подкреплением вышеизложенной схемы изомеризации.

4) Получение δ-окси-валерьянового альдегида в описанном процессе изомеризации, и образование из него непредельной окиси путем дегидратации, подтверждает его строение циклического полуацеталя, доказанное Helferich'ом в ряде работ[1] по отношению к γ-окси-валерьяновому, δ-оксикапроновому, ε-окси-метилкапроновому и др. альдегидам, показавшему, что в свободном состоянии указанные альдегиды существуют в виде десмотропной смеси форм окси-альдегидной и циклической (лактольной)

$$CH_2OH\,(CH_2)n\,CHO \rightleftarrows CH_2\,(CH_2)n\,CHOH,$$

(концевые группы CH_2 и $CHOH$ замкнуты через O)

в которой, в случае свободного состояния альдегида, преобладает форма лактольная, в случае же разбавленных водных растворов, равновесие сдвинуто в сторону окси-альдегидной формы. Кроме того подтверждением циклического строения, полученного в процессе изомеризации, δ-окси-валерьянового альдегида служит величина найденной молекулярной рефракции (25.90), отвечающая его циклическому строению (26.26), а не окси-альдегидному (26.83).

Приношу глубокую благодарность акад. Демьянову, внимательно руководившему работой, и Комитету по химизации, давшему возможность провести ее.

Петровско-Разумовское. 22 IV 1931.

[1] B. Helferich. Ber., Bd. 52, S. 1123 (1919). Idem. Ber., Bd. 55, S. 702 (1922). Idem. Ber., Bd. 64, S. 194 (1931).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ИЗ ОБЛАСТИ РЕАКЦИЙ НЕПРЕДЕЛЬНЫХ УГЛЕВОДОРОДОВ С АЗОТИСТЫМ АНГИДРИДОМ И АЗОТНОВАТОЙ ОКИСЬЮ. О ПРОДУКТАХ ДЕЙСТВИЯ N_2O_3 НА ЦИКЛОПЕНТЕН

Н. Я. ДЕМЬЯНОВА и В. В. ВИЛЬЯМСА

Излагаемые далее результаты исследования действия азотистого ангидрида на циклопентен относятся к области взаимодействия непредельных углеводородов и других непредельных соединений с азотистым ангидридом и азотноватой окисью. Несмотря на то, что этим вопросом занимались многие ученые и среди них один из нас и по нему имеется обширная литература,[1] что вопрос представляет разносторонний интерес в связи с взглядами на строение N_2O_3 и N_2O_4 и с их ролью в процессе нитрования, что получающиеся соединения, нередко кристаллические, могут служить для характеристики углеводородов, в частности терпенов, что продукты присоединения способны к многочисленным, разнообразным реакциям, что дает возможность получать много различных соединений, — вопрос этот далеко не разработан с той полнотой и систематичностью, которых он заслуживает.

Сложность вопроса обуславливается как тем, что оба окисла азота теоретически могут присоединяться различным образом, так и тем, что эти продукты уже в процессе образования могут подвергаться дальнейшим изменениям, что влечет за собою образования сложной смеси.

Переходя к первой части вопроса, именно к способу присоединения N_2O_3 и N_2O_4 не лишне коснуться вопроса о их строении. В состоянии паров как тот, так и другой окисел находятся в состоянии диссоциации,

[1] Довольно подробно литература приведена у I. Houben. Die Methoden der organischen Chemie. 2. Aufl. 1924, Bd. IV, 110—120, а также до 1899 г. систематически и критически в исследовании Н. Я. Демьянова: О действии азотного ангидрида и азотноватой окиси на этиленовые углеводороды. Москва, 1899.

при чем N_2O_3 почти вполне диссоциирован на NO и NO_2, т. е. представляет равновесную систему $N_2O_3 \rightleftarrows NO + NO_2$, в которой равновесие весьма сильно сдвинуто вправо.

N_2O_3 может иметь двоякое строение $\begin{matrix} NO \\ | \\ NO_2 \end{matrix}$ и $\begin{matrix} NO \\ | \\ ONO \end{matrix}$ при чем возможно, что эти формы представляют равновесную систему. Молекула N_2O_4 может быть построена трояким образом, при чем и эти формы по воззрению некоторых ученых находятся в равновесии.

$$\begin{matrix} O-N=O \\ | \\ O-N=O \end{matrix} \qquad \begin{matrix} O=N=O \\ / \\ O-N=O \end{matrix} \qquad \begin{matrix} O=N=O \\ | \\ O=N=O \end{matrix} \left(\begin{matrix} -O-NO_2 \\ -NO_2 \end{matrix} \right)$$

Понятно, что и продукты диссоциации N_2O_3 и N_2O_4, т. е. собственно группа NO_2 может иметь двоякое строение. В результате можно ожидать образования следующих продуктов присоединения:

для N_2O_3:

$$\overset{\text{I}}{\begin{matrix} -CH-N=O \\ | \\ -CH-ONO \end{matrix}} \quad \text{и} \quad \overset{\text{II}}{\begin{matrix} -CH-N=O \\ | \\ -CH-NO_2 \end{matrix}}$$

нитрозиты — псевдонитрозиты

для N_2O_4:

$$\overset{\text{III}}{\begin{matrix} -CH-ONO \\ | \\ -CH-ONO \end{matrix}} \quad \overset{\text{IV}}{\begin{matrix} -CH-NO_2 \\ | \\ -CH-ONO \end{matrix}} \quad \overset{\text{V}}{\begin{matrix} -CH-NO_2 \\ | \\ -CH-NO_2 \end{matrix}} \quad \overset{\text{VI}}{\begin{matrix} -CH-NO \\ | \\ -CH-ONO_2 \end{matrix}}$$

азотист. эфиры гликолей — азотист. эфиры нитроспиртов — двунитросоединение — нитрозаты.

Некоторые из этих продуктов (I, II, VI, иногда V) представляют кристаллические вещества, другие (III и IV), по крайней мере в жирном ряду, представляют жидкости. В то время как кристаллические вещества сравнительно прочны, жидкие склонны весьма легко разлагаться, даже при низкой температуре, с сильным разогреванием, доходящим до самовоспламенения, и с обильным выделением газов, что влечет иногда за собой опасные взрывы. Особенно легко разлагаются азотистые эфиры. Продукты присоединения обычно тем более склонны к разложению, чем при более низкой температуре они получены.

Переходим к рассмотрению изменений, которым могут подвергаться продукты присоединения в процессе образования. Нитрозогруппа может переходить в изонитрозогруппу $=NOH$ (а также повидимому иногда в группу — $\overset{O}{\underset{C-NH}{\wedge}}$); она может окисляться в нитрогруппу, в результате чего соединение формулы I может переходить в IV, а второй II в V. Нитрозогруппа может отщепляться с водородом соседнего атома углерода в виде HNO с образованием непредельного нитросоединения. Наконец, нитрозогруппа одной молекулы может соединяться с нитрозогруппой другой молекулы с образованием биснитрозо-соединений — биснитрозитов VII и биснитрозатов VIII.

$$(VII)\quad \begin{array}{ccc} -CHNO_2 & & O_2NCH- \\ | & & | \\ -CH- & N_2O_2 & -CH- \end{array} \qquad (VIII)\quad \begin{array}{ccc} -CHNO_3 & & O_3NCH- \\ | & & | \\ -CH- & NO_2 & -CH'- \end{array}$$

при чем в VII группы NO_2 могут быть построены двояко $-ONO$ и $-NO_2$.

Если реакция может быть столь сложной при действии сухими газообразными N_2O_3 и N_2O_4, то в присутствии воды она может осложняться еще присоединением азотной или азотистой кислоты, образующихся при действии воды на N_2O_4: $N_2O_4 + H_2O = HNO_3 + HNO_2$. При присоединении азотной кислоты могут образоваться нитроалкоголи, которые далее могут этерифицироваться, напр.:

$$CH_2 = CH_2 + HNO_3 = CH_2NO_2 . CH_2OH$$

$$CH_2NO_2 . CH_2OH + HNO_3 = CH_2NO_2 . CH_2ONO_2 .$$

Далее на ход реакции влияет строение углеводорода, растворители, температура и прочие условия.

Один из нас много занимался вопросом о взаимодействии непредельных углеводородов с N_2O_3 и N_2O_4 как сам, так и вместе с учениками, и те обобщения, которые были высказаны в виде следующих положений еще в 1899 г. оказываются в общем справедливыми до сих пор.

1) «Восстановление продуктов присоединения окислов азота к непредельным соединениям может служить способом получения диаминов или оксаминов, смотря по строению исходного углеводорода».

2) «Неизвестно с достоверностью ни одного случая прямого нитрования непредельного жирного нитросоединения крепкой азотной кислотой; полученные таким путем до сих пор нитросоединения являются продуктами распадения первоначальных продуктов присоединения».

В соответствии с первым положением получен был ряд новых диаминов восстановлением продуктов присоединения к непредельным углеводородам этиленового ряда и метиленциклобутану.[1] При том диамины получались как при восстановлении кристаллических продуктов присоединения N_2O_3, так наз. нитрозитов, так и жидких продуктов. Так как получение диаминов доказывало, что оба атома азота связаны с углеродом непосредственно, то строение нитрозитов должно быть (в простейшем случае):

$$\begin{array}{ccc} CH_2 & — & CH_2 \\ | & & | \\ NO & & NO_2 \end{array}$$

или удвоенного молекулярного веса. Нитрозиты такого строения Виланд предложил называть псевдонитрозитами. На основании исследований одного из нас он в настоящее время отказался от высказанного им ранее взгляда, что псевдонитрозиты могут образовать только жирно-ароматические соединения[2] и признал, что господствующей формой присоединения N_2O_3 являются именно псевдонитрозиты и даже вопрос о существовании настоящих нитрозитов иного строения, напр.

$$\begin{array}{ccccccl} & & & & & & /CH_3 \\ CH_3 & — & C & — & C & \langle & \\ & & | & & | & & \backslash CH_3 \\ & & ONO & & NO & & \end{array}$$

подвергнул сомнению, допустив, что и этот нитрозит имеет строение псевдонитрозита, т. е. содержит настоящую нитрогруппу NO_2, а не ONO. По этому вопросу он говорит следующее:

«Aethylen selbst scheint nach den schönen Untersuchungen von Demjanow, die mir erst sehr spät bekannt geworden sind, ein Nitrosit gleicher Art su bilden. Das Derivat des Propylens ist durch Reduction zum Propy-

[1] Как правило, вместе с диаминами образуются оксамины и безазотистые продукты, не содержащие азота — альдегиды или кетоны.

[2] Ann. 327, 154 (192), 329, 225.

lendiamin von dem russischen Chemiker, einwandfrei als Pseudonitrosit erkannt worden. *Es scheinen also bei der Anlagerung von* N_2O_3 *an ungesättigten Verbindungen ausnahmslos Pseudonitrosite gebildet zu werden*».[1]

В подтверждение своего взгляда Виланд приводит, что по его исследованиям циклогексен и терпинен с N_2O_3 дают также псевдонитрозиты. Следует добавить, что по исследованиям одного из нас псевдонитрозиты образуют, кроме этилена и пропилена, так же все три бутилена и метиленциклобутан.

В связи с вопросом о присоединении N_2O_3 Виланд затрагивает вопрос о строении продуктов присоединения N_2O_4, которые образуются одновременно с нитрозитами, и в противовес с господствовавшими ранее взглядами, что при этом образуются, так называемые динитрюры — продукты присоединения не окончательно выясненного строения, но во всяком случае заключающие одну группу — ONO, приходит к выводу, что и динитрюры (напр. динитростильбен) содержат обе группы NO_2 в виде нитрогрупп.

Какие трудности встречались на пути разрешения вопроса о строении продуктов присоединения $2NO_2$ по месту двойной связи видно из того, сколь различны на этот счет были взгляды выдающихся исследователей. Так, продукты присоединения $2NO_2$ к амилену, полученный Гутри, к каприлену — Буисом, к четыреххлористому этилену — Кольбе, к диаллилу — Л. Генри и позднее Анжели считались этими исследователями за настоящие двунитросоединения, хотя в диамин ни одно из этих соединений не было восстановлено.

В. Мейер, не получив амина при восстановлении продукта присоединения $2NO_2$ к триметилэтилену счел это соединение за азотистый эфир амиленгликоля $C_5H_{10}\left\langle\begin{matrix}ONO\\ONO\end{matrix}\right.$, распространил этот вывод на все перечисленные выше продукты присоединения $2NO_2$ и признал взгляд Генри и Кольбе о возможности получать настоящие нитросоединения в жирном ряду при действии азотноватой окиси в высшей степени невероятным. Позднее Валлах доказал, что продукты присоединения $2NO_2$ к триметилэтилену названному амиленнитрозатом принадлежит строение: $C_5H_9\left\langle\begin{matrix}ONO_2\\NOH\end{matrix}\right.$; таким образом, несмотря на то, что при восстановлении оба атома азота могут выделиться в виде аммиака, один из них связан непосредственно с углеродом.

[1] Ann. 424, 71.

Продукты присоединения $2NO_2$, построенные так, как амиленнитрозат, получили название нитрозатов; нитрозитами были названы продукты присоединения N_2O_3, содержащие группы $=NOH$ и ONO. Затем Габриель изучал продукты присоединения $2NO_2$ по месту двойной связи к коричной кислоте, бензилиденфталиду и бензилиденфталимиду; он показал, что продукты эти непостоянны, способны к разнообразным превращениям и, что особенно важно для выяснения строения, способны распадаться с образованием нитросоединений, откуда следует, что одна группа NO_2 представляет настоящую нитрогруппу; характер второй группы NO_2 остался невыясненным, так как, хотя Габриель и намеревался подвергнуть продукты присоединения восстановлению, но неизвестно, предпринимал ли он опыты в этом направлении. Валлах, установив строение амиленнитрозата, допускает, что продукты присоединения N_2O_4 и N_2O_3 могут иметь и иное строение, так, в продуктах присоединения, изученных Габриелем, он признает присутствие групп NO_2 и ONO. Что в некоторых случаях $2NO_2$ могут присоединяться в виде двух групп $—NO_2$ с образованием настоящих двунитросоединений доказано, несомненно, исследованиями одного из нас над $\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}\!\!>C=C<\!\!\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}$ и Виландом над стильбеном $C_6H_5CH=CHC_6H_5$. Продукт $C_6H_{12}N_2O_4$ из тетраметил-этилена при восстановлении дал тетраметил-этилен-диамин и был получен синтезом из $\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}\!\!>CHNO_2$—нитроизопропана, а так наз. стильбен «динитрюр»

$$\begin{matrix}C_6H_5CH & — & CHC_6H_5\\ | & & |\\ NO_2 & & NO_2\end{matrix}$$

синтезирован действием серебра на фенилбромнитрометан.

$$2\,C_6H_5\overset{\displaystyle H}{\underset{\displaystyle NO_2}{C}}—Br + 2Ag = \begin{matrix}C_6H_5CH & — & CHC_6H_5\\ | & & |\\ NO_2 & & NO_2\end{matrix} + 2AgBr$$

Таким образом, для продуктов присоединения $2NO_2$ установлено в отдельных случаях образование веществ, такого строения: 1) настоящих двунитросоединений; 2) нитроазотистых эфиров; 3) нитрозо- (или изонитрозо-)

азотных эфиров, так наз. нитрозатов. Что касается азотистых эфиров гликолей, то, хотя образование их теоретически вероятно, фактов, доказывающих их образование с несомненностью, неизвестно; имеется лишь указание Ю. Шмидта, что при действии NO_2 на тетраметил-этилен образуется двуазотистый эфир, так как продукт подвергнутый восстановлению цинковой пылью и горячей уксусной кислотой не дал оснований.

Хотя теоретически продукты присоединения N_2O_3 представляют менее разнообразия, однако вопрос о строении нитрозитов тоже представлял немалые затруднения.

Рядом с кристаллическими продуктами всегда образуются жидкие продукты.

Выше было указано, что рядом с диаминами при восстановлении жидких продуктов присоединения обычно образуются также и оксиамины, а в отдельных случаях (напр., из продукта присоединения к псевдобутилену) производные пиразина. Весьма вероятно, что эти соединения образуются за счет соединений, заключающих рядом с нитро- или нитрозогруппой одну из групп ONO или — ONO_2, хотя возможно, что и нитрогруппа в некоторых случаях, подобно галогенам, с которыми она сходна, может заменяться в конце концов на водный остаток. Ведь еще М. И. Коновалов показал, что при восстановлении оловом и соляной кислотой мононитросоединений одновременно с аминами образуются также альдегиды или кетоны; при дальнейшем восстановлении они могли бы перейти в спирты, напр.:

$$CH_3(CH_2)_4CH_2NO_2 \rightarrow CH_3(CH_2)_4\ CH = NOH \rightarrow$$
$$CH_3(CH_2)_4\ COH \rightarrow CH_3(CH_2)_4\ CH_2OH.$$

Таким образом, если получение диаминов доказывает, что оба атома азота связаны непосредственно с углеродом, то образование оксиаминов с той же степенью убедительности обратного (т. е., что азот связан с кислородом) не доказывает.

Итак, несмотря на очень большое количество работ, область эта представляет еще обширное поле для дальнейших исследований. Но принимая во внимание сложность вопросов и экспериментальные трудности, следует прийти к заключению, что только систематическая и планомерная работа в этой интересной, но трудной и небезопасной области, может при-

вести к обобщениям, устранению противоречий и к разрешению ряда вопросов, из которых можно указать следующие:

1) Какие продукты присоединения N_2O_3, кроме псевдонитрозитов и N_2O_4, кроме двунитросоединений могут давать непредельные углеводороды.

2) Как влияет на легкость образования и строение продуктов присоединения строение углеводорода, растворители, температура и освещение.

3) В частности, как влияет количество водорода при атомах, связанных двойной связью, существует ли разница между двойной связью в цикле и боковой цепи, нет ли особенности в этом отношении у семициклической двойной связи, как относится сопряженная двойная связь. Как относятся углеводороды с двумя двойными связями (аллен, дивинил, диаллил), т. е. способны ли они присоединять N_2O_3 и N_2O_4 по месту одной или двух двойных связей. Изучить ближе условия перехода нитрозогруппы в нитрогруппу и исследовать вопрос о переходе псевдонитрозитов в двунитросоединения, а также в непредельные нитросоединения, нитроспирты и их простые и сложные эфиры. Выяснить природу жидких продуктов присоединения N_2O_3 и N_2O_4. Изучить отношение индивидуальных терпенов к N_2O_3 и N_2O_4 и установить строение неизученных нитрозитов и нитрозатов. Выяснить вопрос, возможно ли присоединение N_2O_3 или N_2O_4 с разрывом цикла, единственный пример чего пока представляет антрацен. Понятно, что приведенный перечень работ не исчерпывает далеко всех вопросов, требующих разрешения, а имеет целью указать ряд первоочередных задач, разрешение которых необходимо для освещения этой, до сих пор не совсем ясной и запутанной области.

Часть экспериментальная

ПОЛУЧЕНИЕ ЦИКЛОПЕНТЕНА C_5H_8

Исходным продуктом для получения циклопентена был циклопентанон, который для этого сначала восстанавливался в циклопентанол по методу Vislicenus'а и Hentschel'я.[1]

В результате четырех опытов восстановления было получено 251 г циклопентанола, кипевшего в интервале 138—139°, что составляет в среднем 57% от веса взятого кетона.

[1] V. Vislicenus und Hentschel, L. Ann., 275 (1893), 312.

Получение циклопентена из циклопентанола производилось по методу предложенному Зелинским и Целиковым,[1] который заключается в дегидратации спирта с помощью обезвоженной щавелевой кислоты. Для этого 84 г циклопентанола, помещенного в колбу Вюрца, нагревались с 336 г обезвоженной щавелевой кислоты на очень слабом огне, при этом происходит отщепление от спирта элементов воды, которая вместе с образовавшимся углеводородом отгоняется в приемник охлаждаемый снегом с солью. Реакция проходит чрезвычайно гладко. Полученный углеводород промывался водой, сушился сплавленным $CaCl_2$ и перегонялся при обычном давлении в интервале 45—45.5°. Вес перегнанного углеводорода равнялся 55.6 г, что составляет 84% от теории.

ДЕЙСТВИЕ N_2O_3 НА ЦИКЛОПЕНТЕН

15 см³ циклопентена смешивались с 12 см³ абсолютного эфира и 12 см³ петролейного эфира, смесь сильно охлаждалась и в охлажденный раствор медленно пропускался азотистый ангидрид, который получался действием азотной кислоты уд. в. 1.34 на мышьяковистый ангидрид и просушивался в Y-образной трубке с плавленным азотнокислым кальцием. Реакционная смесь сперва окрасилась в светлозеленый цвет, а затем разделилась на два слоя: верхний — растворитель и нижний — маслообразная жидкость оранжевого цвета, в которой плавало незначительное количество очень мелких кристаллов, образовавших небольшие корочки.

После двухдневного стояния на холоду выпало еще довольно значительное количество хорошо образованных бесцветных кристаллов, которые были отфильтрованы и промыты на фильтре абсолютным эфиром. Во втором опыте было взято 15 см³ углеводорода и смешаны с 24 см³ абсолютного эфира, петролейный же эфир совсем не приливался. Смесь насыщалась при сильном охлаждении азотистым ангидридом, и после пятидневного стояния на холоду выделилось значительное (4.5 г) количество кристаллического осадка.

Полученные кристаллы не растворялись в эфире, петролейном эфире, бензоле, сероуглероде, трудно растворялись на холоду в уксусноэтиловом эфире, хлороформе и спирте и хорошо — в ацетоне.

[1] Зелинский и Целиков, ЖРФХО, 33, стр. 655.

Вещество, перекристаллизованное из ацетона, представляло собой бесцветные призмы до 2 мм длиной, плавящиеся при 104—105° в зеленую жидкость с выделением бурых паров окислов азота.

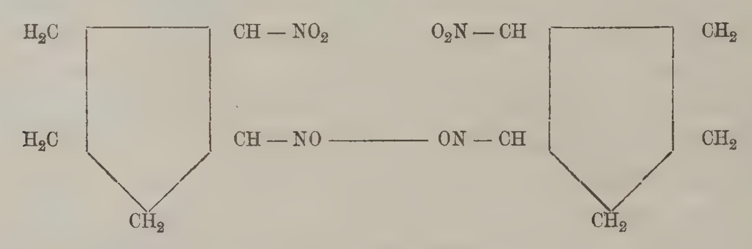
Определение содержания C и H сожиганием с окисью меди по Либиху и N по Дюма дало следующий результат:

I. Навеска вещества	0.1091 г
Вес CO_2	0.1692 »
» H_2O	0.0531 »

II. 0.4089 г вещества дали 68.1 см³ влажного N при t° 20° и давлении 753 мм.

Найдено I	Найдено II	Вычислено для $C_5H_8N_2O_3$
C = 42.29 %		C = 42.03 %
H = 5.44 »		H = 5.55 »
	N = 19.23	N = 19.44 »

Элементарный состав анализируемого вещества соответствует формуле псевдонитрозита циклопентена: $[C_5H_8N_2O_3]_2$, строение которого должно быть следующим:



удвоенная формула принята нами на основании свойств нитрозита по аналогии с другими псевдонитрозитами.

При нагревании 1 г псевдонитрозита с 1 г анилина, растворенного в 20 см³ абсолютного алкоголя, был получен нитроламин, выкристаллизовать который не удалось даже при долговременном стоянии в вакуум-эксикаторе.

ДЕЙСТВИЕ МЕТИЛАТА КАЛИЯ НА ПСЕВДОНИТРОЗИТ ЦИКЛОПЕНТЕНА $[C_5H_8N_2O_3]_2$

27 г металлического калия растворялись в избытке метилового алкоголя и к полученному таким образом раствору метилата калия прибавлялось небольшими порциями 27 г кристаллического циклопентеннитрозита,

при этом раствор несколько разогревался и принял бурую окраску. От прореагировавшей смеси был отогнан с водяным паром метиловый спирт, причем последний обладал слабой щелочной реакцией и аминным запахом. Затем соль образовавшегося нитросоединения прибавлением 5% H_2SO_4 при сильном охлаждении была разложена и выделившееся свободное нитросоединение было отогнано с водяным паром; погон насыщался сернокислым аммонием и обрабатывался эфиром. Эфирная вытяжка высушивалась плавленным Na_2SO_4 и эфир отгонялся. Остаток после удаления эфира был подвергнут фракционировке в вакууме при 30 мм, при чем получено две фракции: первая кипела при t° 105—108° и весила 9.7 г, вторая кипела при t° 109—133°, весила 0.7 г.

Первая фракция представляла собой подвижную, слегка окрашенную в зеленовато-голубой цвет жидкость со слабым запахом нитробензола и обладала сильнейшим действием на слизистую оболочку носа и глаз.

Определение физических свойств полученного вещества дало следующий результат:

Вес пикнометра	6.1331 г
» воды при 20°	2.9583 »
» пикнометра + вещества при 20°	9.4775 »
» вещества при 20°	3.3444 »
Удельный вес $d\frac{20^\circ}{20^\circ}$	1.1305
» » $d\frac{20^\circ}{4^\circ}$	1.1275
Рефракция $n\frac{20^\circ}{D}$	1.4668

MR вычисленная для $C_5H_7NO_2$ и $|\overline{=}_1$ = 28.28
MR найденная 27.70

При определении элементарного состава полученного соединения оказалось, что оно было выделено не в совсем чистом состоянии:

Навеска	0.1595 г
Вес CO_2	0.3003 »
» H_2O	0.1062 »

Найдено	Вычислено для $C_5H_7NO_2$
C = 51.35%	C = 53.09%
H = 7.44 »	H = 6.18 »

Навеска 0.2364 г дала 22.2 см³ N при t° = 10° и давлении 758 мм

Найдено	Вычислено для $O_5H_7NO_2$
N = 11.29%	N = 10.63%

Мы пытались разделить образовавшуюся смесь путем ряда фракционированных перегонок, но это к желаемому результату не привело: результаты многочисленных анализов выделенных фракций приблизительно давали цифры, аналогичные вышеприведенным.

Размышляя о причинах вызвавших повышение содержания углерода и водорода мы сделали предположение, что при действии метилата на нитрозит образовалось соединение $C_5H_8\langle{}^{NO_2}_{OCH_3}$, т. е. произошло замещение группы NO на метоксил. Позднее мы нашли в работе Виланда указание на то, что некоторые непредельные нитросоединения способны присоединять по месту двойной связи C_2H_5OH с образованием простых эфиров.

Предположение это вполне оправдалось как на результатах анализа высшей фракции, так и на свойствах соединения. Особенно убедительны результаты определения метоксильных групп. Ниже мы приводим анализ фракции 109—133° (30 мм),[1] которая была получена в процессе самой первой фракционировки сырого продукта:

I. Навеска	0.1826 г.
Вес CO_2	0.3326 »
Вес H_2O	0.1213 »

II. Навеска 0.1568 г дала 13.1 см³ N при t° 13°.4 и давл. 756 мм.
III. Навеска 0.1508 г дала 12.4 см³ N при t° = 12°.6 и давл. 760 мм.

Найдено			Вычислено для $C_5H_8\langle{}^{NO_2}_{OCH_3}$
I	II	III	C = 49.65%
C = 49.67%			H = 7.58 »
H = 7.44 »	N = 9.86%	N = 9.83%	N = 9.65 »

т. е. анализируемое соединение представляет собою метоксинитроциклопентан.

Очевидно смесь этих двух соединений и представляет фракция 105—108°, а вследствие близости их температур кипения они не могли быть расфракционированы. За это предположение говорит анализ сожиганием.

Образование метоксинитросоединения $C_5H_8\langle{}^{NO_2}_{OCH_3}$ подтверждает и положительная псевдонитрольная проба, характеризующая присутствие

[1] Малое количество вещества не позволило точно определить температуру кипения.

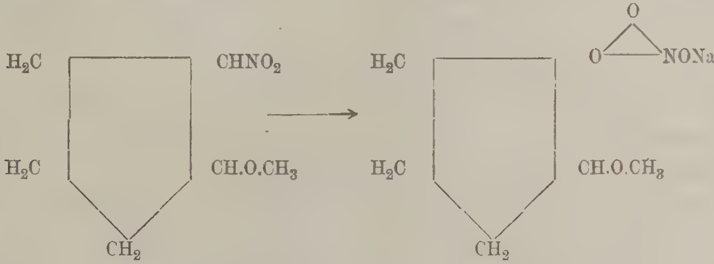
в соединении вторичной нитрогруппы CH—NO_2. (К нескольким каплям вещества приливалось 1 см³ крепкой щелочи, 0.5 см³ хлороформа, несколько капель насыщенного раствора азотистонатровой соли и затем по каплям разведенной H_2SO_4. После взбалтывания и отстаивания хлороформенный слой окрасился в красивый зеленовато-голубой цвет).

Определение содержания метоксилов по Цейзелю во фракции 105—108° дало следующий результат:

Навеска = 0.2260 г. Вес AgJ = 0.2686 г, что соответствует 0.0354 г. $O.CH_3$.

Найдено	Вычислено для $C_5H_8NO_2$ O.CH³
$O.CH_3$ = 15.63%	$O.CH_3$ = 21.37%

т. е. 73% всей смеси состоит из метоксинитросоединения. При действии алкоголята натрия на метоксинитросоединение образовалась кристаллическая, слегка желтоватая соль этого соединения,



анализ которой на содержание Na дал следующий результат.

Вес вещества . . . . 0.1122 г
» Na_2SO_4 . . . . 0.0496 »
» Na . . . . 0.0160 »

Найдено	Вычислено для $C_5H_7\langle^{NO_2Na}_{OCH_3}$
Na = 14.26%	Na = 13.77

Все это в совокупности несомненно доказывает, что при действии метилата калия на нитрозит циклопентена наряду с нитроциклопентеном (I) образуется метиловый эфир нитроциклопентана. Относительно механизма образования последнего соединения возможны два предположения. Во-первых, соединение это могло образоваться присоединением CH_3 OH к нитроциклопентену в соответствии с наблюдавшимся Виландом фактами (II),

но нам представляется возможным и другой путь образования этого соединения прямо из нитрозита согласно уравнению (III).

(I)

H_2C — $CH—NO_2$
H_2C — $CH—NO$ $+ KOCH_3 =$
CH_2

H_2C — CNO_2
H_2C — CH $+ KNO + CH_3OH$
CH_2

(II)

H_2C — $C—NO_2$
H_2C — CH $+ CH_3OH =$
CH_2

H_2C — $CH—NO_2$
H_2C — $CH—OCH_2$
CH_2

(III)

H_2C — $CH—NO_2$
H_2C — $CH—NO$ $+ KOCH_3 =$
CH_2

H_2C — $CH—NO_2$
H_2C — $CH—OCH_3$ $+ KNO$
CH_2

При действии свободной щелочи, а также метилата калия на жидкие продукты, полученных в результате действия N_2O_3 на циклопентен, образование непредельного нитросоединения наблюдалось в ничтожных количествах.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЖИДКОЙ ФАЗЫ ПОЛУЧЕННОЙ ПРИ ДЕЙСТВИИ N_2O_3 НА ЦИКЛОПЕНТЕН

Отфильтрованная от кристаллов нитрозита маслообразная жидкость обладала способностью растворяться только в определенном объеме эфира, приблизительно равном двойному объему масла, при дальнейшем же прибавлении эфира сперва выпадает эмульсия, которая собирается на дне в сплошной слой.

При отгонке от полученного жидкого продукта эфира, приходилось соблюдать некоторые меры предосторожности, так как последнее при малейшем нагревании разлагалось с сильным взрывом, поэтому эфир отгонялся на холоду путем просасывания через раствор сухого воздуха, с которым последний и улетучивался.

Остаток после удаления эфира представлял собою красноватое, довольно густое масло.

Часть полученного вещества была подвергнута восстановлению при помощи олова и крепкой соляной кислоты, при чем реакционную колбу приходилось очень сильно охлаждать и кислоту приливать по каплям, в противном случае реакция проходила настолько энергично, что почти все вещество обугливалось с сильным выделением удушливого дыма. После окончания восстановления в колбу приливалось немного воды и смесь подвергалась перегонке с водяным паром для удаления нейтральных продуктов, которых оказалось очень незначительное количество, отчасти растворившихся в погонных водах, отчасти севших на дно приемника в виде аморфных пленок. (При пуске пара в реакционную колбу наблюдалось довольно сильное вскипание вещества с выделением бурых окислов азота). Погонные воды были подвергнуты перегонке с водою до одной трети первоначального объема, отгон высаливался поташем и вещество извлекалось эфиром. После отгонки эфира осталось незначительное количество жидкого вещества, которое обладало кетонным запахом и с семикарбазидом дало хорошо кристаллизующийся из спирта семикарбазон, плавящийся при t° 203°, что соответствует t° плавления семикарбазона циклопентанона. Определение азота по Дюма в полученном семикарбазоне дало следующий результат:

Навеска 0.0426 г дала 11.2 см^3 влажного N при t 19° и давлении 739.5 мм

Найдено	Вычислено для $C_6H_{11}ON_3$
N = 29.87%	N = 29.78%

ОСНОВНЫЕ ПРОДУКТЫ

После отгонки нейтральных продуктов реакционная смесь обрабатывалась крепким раствором KOH до резко щелочной реакции и выделившийся свободный амин был отогнан с водяным паром. Отгон нейтрализовался 20%-ной соляной кислотой и выпаривался досуха в вакууме, так как при

атмосферном давлении хлористоводородная соль обнаруживала следы разложения.

Остаток после выпаривания был высушен в вакуум-эксикаторе и подвергся экстракции абсолютным алкоголем для отделения солей амина от хлористого аммония. Экстракт упаривался на водяной бане до суха, соль амина разлагалась щелочью и свободный амин вместе с водою отгонялся в вакууме на огне досуха. Амин оказался хорошо растворимым в воде и трудно летучим с парами последней, это дало возможность довольно легко отделить его от воды, путем отгонки воды в вакууме. Освобожденный от воды амин был перегнан в вакууме при 6 мм в интервале 90—115°. Амин представлял собою густую бесцветную жидкость с типичным аминным запахом, при охлаждении он частично закристаллизовался, кристаллы были отфильтрованы на холоду и так как они оказались плохо растворимыми в абсолютном эфире, то при обработке спиртового раствора жидкой части абсолютным эфиром удалось высадить почти нацело все кристаллическое вещество. После удаления спирта и эфира жидкий амин был перегнан в вакууме при 8 мм в интервале 85—100°. Жидкий амин жадно притягивал CO_2 воздуха, с HCl давал мелкокристаллическую хлористоводородную соль, легко растворимую в воде и кристаллизовавшуюся из последней в виде сплошной кристаллической массы. В алкоголе соль также растворима и выделяется по прибавлении эфира в виде очень мелких кристаллов. Сернокислая соль амина кристаллизовалась из воды в виде хорошо образованных, довольно больших призм. С пикриновой кислотой амин давал великолепно кристаллизующийся в виде длинных красно-бурых игл сильно действующих на поляризованный свет пикрат, плавящийся при 221°. С хлорной платиной жидкий амин образовывал мелкокристаллический оранжевый осадок хлороплатината, трудно растворимого в кипящей воде и алкоголе. Анализ хлороплатината дал следующий результат:

I. Навеска . . . . 0.3912 г
Вес CO_2 . . . . 0.1732 »
» H_2O . . . . 0.0956 »

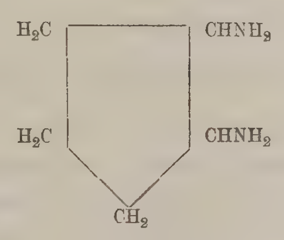
II. Навеска 0.2852 г при сожигании по Дюма дала 13.7 см³ N при t° = 14°.4 и давлении 741 мм.

III. Навеска . . . . 0.3686 г
Вес платины . . . . 0.1409 »

VI. Навеска . . . . 0.1953 »
Вес платины . . . . 0.0744 »

Найдено				Вычислено для
I	II	III	IV	$(C_5H_{12}N_2\ 2HCl)$ Pt Cl_4
C = 12.07%	N = 5.56%	Pt = 38.22%	Pt = 38.09%	C = 11.76%
H = 2.73 »				H = 2.74 »
				N = 5.48 »
				Pt = 38.21 »

Из результатов анализа видно, что исследуемое вещество представляет собою хлороплатинат циклопентандиамина (1.2 диаминоциклопентана).



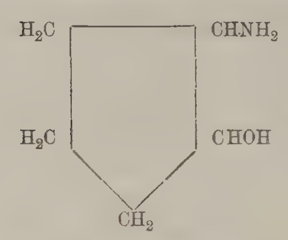
Кристаллическое вещество, выделенное из смеси с диамином, обладало основными свойствами, кристаллизовалось в блестящих довольно крупных кристаллах не обладавших запахом, хорошо растворялось в воде и спирте, трудно — в эфире. После продолжительного высушивания в вакуум-эксикаторе оно плавилось при 63—64°. С хлорной платиной дает очень гигроскопичный, на воздухе расплывающийся хлороплатинат, пикрат его представляет собою желтые, мелкие иглы плавящиеся при 155°, кроме того оно дает белые кристаллические соединения, не растворимые в воде с сулемою и фосфорновольфрамовой кислотой.

Определение азота в кристаллическом соединении по способу Дюма дало следующий результат:

Навеска 0.1374 г дала 16.0 см³ N при t° = 15°6 и давлении 746 мм.

Найдено	Вычислено для $C_5H_{11}ON$
N = 13.53%	N = 13.86%

Очевидно анализируемое вещество представляет собой оксиамин, образование которого в этих условиях весьма возможно.



Из-за неимения большого количества исследуемого вещества нам не удалось подробнее ознакомиться с природой и свойствами последнего.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О РАССЛАИВАНИИ СТЕКЛА ПРИ ЕГО ЗАСТЫВАНИИ

Б. С. ШВЕЦОВА

(*Представлено академиком* В. Ф. Миткевичем)

При затвердевании растворов выделяющаяся твердая фаза обычно отличается по своему химическому составу от жидкости. Вначале из раствора выпадает та компонента, по отношению к которой раствор оказывается пересыщенным при данных температуре и давлении, причем непрерывно изменяется состав раствора и понижается температура его дальнейшего затвердевания. Затем, в случае многокомпонентного раствора, к продолжающейся выделяться первой компоненте присоединяется вторая, третья и т. д., пока состав раствора не сделается по отношению ко всей многокомпонентной системе эвтектическим. Тогда и только тогда остающийся раствор затвердеет, как одно целое, без изменения химического состава и при постоянной температуре, подобно химическому индивидууму.

Выделившийся при таких условиях осадок обнаруживает послойное изменение состава. Вполне однородный раствор образует таким образом при затвердевании неоднородное твердое тело: он расслаивается.

Описанный процесс имеет большое практическое значение при естественном или искусственном выделении солей из их растворов, а также при затвердевании металлических сплавов. Наблюдающееся в последнем случае расслоение первоначально однородного жидкого сплава носит название ликвации.

Величина расслоения или, что то же, степень неоднородности затвердевшего раствора зависит от скорости понижения его температуры. Чем медленнее ведется охлаждение раствора, тем больше получится расслаивание. Наоборот, при быстром охлаждении расслаивание более или менее

затушевывается и, например, можно создать такой режим охлаждения некоторых металлических сплавов, при котором ликвация в них практически почти полностью будет отсутствовать.

Однако, встречаются и исключения из этого правила. Если взять раствор таких веществ, взаимная растворимость которых ограничена (например, вода + серный эфир или вода + фенол), то расслаивание его может наступить еще в жидкой фазе. В этом случае четкое расслоение сохранится и при затвердевании раствора, независимо от скорости охлаждения последнего.

Возникает вопрос: не может ли при определенных условиях сопровождаться расслаиванием застывание стекла?

Правда, процесс застывания стекла существенно отличается от затвердевания растворов. Там первоначально гомогенная системав определенный момент делается гетерогенной, причем наряду с жидкойфазой появляются одна или несколько твердых. В случае же стекла гомогенность системы сохраняется неизменной втечение всего процесса застывания, вследствие чего приходится рассматривать стекло, как переохлажденную жидкость, и только огромная вязкость этой жидкости приближает ее по некоторым свойствам к твердым веществам. Таким образом, ставя вопрос о расслаивании стекла при его застывании, заранее приходится исключить возможность получения неоднородности за счет выделения какой-либо твердой фазы, отличающейся по своему составу от остающейся расплавленной стекломассы.

При нормальном застывании стекла никакого выделения кристаллов не наблюдается. Образование же кристаллов при ненормальном застывании стекла квалифицируется, как его «зарухание» или «расстекловывание», т. е. как утрата стекловидного состояния. Но нет ничего абсурдного или невероятного в допущении, что в состав расплавленной стекломассы могут входить такие силикаты, взаимная растворимость которых ограничена. Если критическая точка этих силикатов лежит при такой температуре, когда вязкость стекломассы сравнительно невелика и частицы ее достаточно подвижны, то имеются все данные для расслаивания стекла, которое не может быть устранено никаким дальнейшим перемешиванием и сохранится в застывшем стекле.

Итак, расслаивание стекла при застывании теоретически вполне возможно. Но происходит ли оно в действительности, и, если да, то при

каких условиях и для каких составов стекол, — может быть решено только непосредственным опытом.

Первые намеки на расслаивание свинцовых стекол имеются уже у Фарадея,[1] который при варке флинта нашел, что «на поверхности и на дне тигля получается масса весьма различной плотности». Объяснение этому явлению Фарадей видит в том, что «окись свинца настолько тяжела и вместе с тем легкоплавка, что сразу плавится и падает на дно тигля, чрезвычайно затрудняя естественное перемешивание массы».

Но наблюдение Фарадея стоит одиноко, а последующие исследователи этим вопросом совершенно не занимались.

Правда Гиффорд[2] в итоге 10-летней работы установил постоянное наличие колебаний показателя преломления в различных кусках стекла одной и той же плавки. К аналогичным выводам пришел Цшокке,[3] показавший, что благодаря неоднородности стекла, лишь 50% отшлифованных линз дает отклонение в величине фокусного расстояния меньше 0.5%, а у остальных уклонения могут доходить до 2.5%, тогда как теоретические расчеты и техника шлифовки позволяют получать фокусные расстояния с точностью до 0.1%. Отсюда Цшокке делает заключение, что «изготовление однородного оптического стекла — задача относительно которой нельзя сказать, разрешима ли она».

Но никто из цитированных авторов не приписывает неоднородность стекла его расслаиванию при застывании.

Поэтому представляло определенный интерес повторить наблюдение Фарадея над свинцовыми стеклами и поставить опыты по расслаиванию стекол другого состава, что и сделано автором настоящего сообщения в сотрудничестве с инженерами А. М. Веденеевым, В. Подъельским и А. Палладиным. Пользуюсь случаем принести названным лицам мою глубокую благодарность.

Опыты были поставлены частью в Институте стекла (б. Институт силикатов), частью на стекольных заводах и распадаются на 3 серии.

[1] M. Faraday. On the Manufacture of Glass for Optical Purposes. Phil. Trans., 1830. Цит. по сборн. «Оптическое стекло», Пгр. 1916.

[2] J. W. Gifford. The Existing Limits of Uniformity in Producing Optical Glass. Proc. R. Soc., (A) 87.

[3] Zschokke. Homogenität des optischen Glases. Zschr. f. Instr. 1909. Цит. по сборн. «Оптическое стекло», Пгр. 1916.

ПЕРВАЯ СЕРИЯ ОПЫТОВ

Эта серия опытов была проведена в 1920 г. в Институте силикатов в сотрудничестве с инж. А. М. Веденеевым и носила ориентировочный характер. Поставленная задача состояла в качественном установлении факта, расслаивается ли при застывании данное стекло.

В качестве материала для опытов были взяты следующие стекла:

1) Натрокальциевое зеркальное стекло, полученное с московской зеркальной фабрики, б. М. Франк.

2) Баритовый флинт неизвестного происхождения, кусок которого случайно нашелся в коллекциях Института силикатов.

3) Свинцовый хрусталь с Гусевского хрустального завода.

4) Свинцовый флинт с завода Шотта в Иене.

Для каждого опыта испытуемое стекло растиралось в агатовой ступке в тонкий порошок, тщательно перемешивалось и высыпалось для переплавки в фарфоровый тигель высотою около 25 мм. Переплавка производилась в электрической тигельной печи Гереуса, температура которой при помощи реостата постепенно доводилась втечение 5 час. до 1150 — 1160°С, поддерживалась на этой высоте впродолжении суток и затем также постепенно, втечение 6 — 7 час. доводилась до комнатной. Для отделения стекла от фарфорового тигля, последний вместе с поверхностным слоем стекла (которое могло изменить свой состав от сплавления со стенками тигля) обдирался при помощи наждачного круга.

Так как при расслаивании жидкостей последние должны расположиться по удельному весу, то для контроля расслаивания пикнометрически определялся удельный вес верхней и нижней части переплавленного стекла и сравнивался с удельным весом исходного стекла. В некоторых случаях дополнительный контроль производился при помощи химического анализа на содержание главнейших составных частей.

В итоге произведенных опытов получились следующие результаты.

1. Зеркальное (натрокальциевое) стекло. Определение удельного веса дало такие цифры:

Исходное стекло		2.5324
Переплавленное стекло	верхн. часть	2.5244
	нижн. »	2.5268

Картина получилась очень нечеткая.

Разница между удельными весами верхней и нижней части переплавленного стекла близка к ошибкам опыта и дает только намек на происшедшее расслаивание. Поэтому для окончательного решения вопроса пришлось проделать химический анализ, давший следующее:

	Исходное стекло в %	Переплавленное стекло: Верхняя часть в %	Нижняя часть в %
SiO_2	70.24	69.80	71.22
CaO	14.34	13.67	15.17

Результаты анализа с несомненностью обнаруживают происшедшее расслаивание.

В опытах с натрокальциевым стеклом бросается в глаза уменьшение удельного веса при переплавке стекла — факт, причины которого остались невыясненными. Возможно, что это явление зависит от присутствия газов растворенных в стекле. При производстве зеркального стекла удаление из него образующихся во время варки газов производится весьма тщательно. При переплавке же истертого порошка, обладающего огромной поверхностью, газы легко могут вновь поглотиться расплавленным стеклом из воздуха и, благодаря значительной вязкости стекломассы, соответственно сравнительно невысокой температуре электрической печи, остаться в застывшем стекле в виде мельчайших, незаметных для невооруженного глаза пузырьков, которые и дают снижение удельного веса. Правдоподобность такого объяснения подтверждается опытами Уошберна, Футита и Бентинга,[1] которые показали, что даже свободное от видимых пузырьков оптическое стекло содержит довольно значительное количество растворенных газов, как это можно видеть из следующей таблицы:

Сорт стекла	Число см^3 газа, растворенных в 100 см^3 стекла			
	O_2	CO_2	N_2	Всего
Баритовый флинт	83	27	< 1	110
Тоже	36	12	< 1	48
Легкий флинт	45	10	3	58
Боросиликат (пирекс)	6	5	6	17

[1] Р. Дралле и Г. Кеппелер. Производство стекла, М. 1928, т. I, ч. 1, стр. 322.

2. Баритовый флинт. В этом случае для удельных весов получились следующие данные.

		1	2	Среднее
Исходное стекло		3.2196	3.2178	3.2187
Переплавленное стекло	верхн. часть	3.1926	3.1865	3.1895
	нижн. »	3.2164	3.1946	3.2055

Значительная разница в удельных весах между верхней и нижней частью переплавленного стекла с несомненностью указывает на происшедшее расслаивание.

Подобно натрокальциевому стеклу здесь также наблюдается уменьшение удельного веса при переплавке.

3. Свинцовый хрусталь. При определении удельного веса получились такие цифры:

		1	2	3	Среднее
Исходное стекло		2.9205	—	—	2.9205
Переплавленное стекло	верхн. часть	2.8552	2.8572	2.8558	2.8561
	нижн. «	2.9007	2.9076	2.9023	2.9035

Тоже уменьшение удельного веса при переплавке, как и в ранее рассмотренных стеклах и большая разница между удельными весами верхней и нижней части переплавленного стекла, характеризующая сильное расслоение.

4. Свинцовый флинт. Определение удельного веса дало следующие результаты:

		1	2	Среднее
Исходное стекло		3.6504	—	3.6504
Переплавленное стекло	верхн. часть	3.5980	3.5889	3.5934
	нижн. »	3.6640	3.6605	3.6623

Разница между удельными весами получилась еще большая, чем у свинцового хрусталя, что указывает на еще более сильное расслаивание.

С целью выяснить, как изменился при расслаивании состав стекла, был проделан его химический анализ, давший следующее:

		Переплавленное стекло:	
	Исходное стекло в %	Верхняя часть в %	Нижняя часть в %
SiO_2	45.00	47.48	45.58
PbO	49.09	46.80	50.91

Результаты анализа показывают, что нижняя часть переплавленного стекла богаче окисью свинца, а верхняя часть — беднее ею по сравнению с исходным стеклом.

ВТОРАЯ СЕРИЯ ОПЫТОВ

Проведенная I серия опытов с несомненностью устанавливает, что все испытанные стекла довольно разнообразного состава в большей или меньшей степени обнаруживают расслаивание при застывании.

Некоторая нечеткость этого явления в отдельных случаях, например, у натрокальциевого стекла, объясняется малыми размерами тигля, с одной стороны, и значительной вязкостью стекла при температуре тигельной печи (1150 — 1160° С), с другой, затрудняющими расслаивание.

Представляло определенный интерес повторить эти опыты в тиглях большего размера и провести их при более высокой температуре, т. е. при условиях, которые должны обеспечить более сильное расслаивание.

Такие опыты были проведены в сотрудничестве с инж. В. Подъельским в 1923 г. на Ключинском стекольном и на Гусевском хрустальном заводах.

Исследованию подвергались натронно-свинцовое и калийно-кальциевое стекло.

1. Натронно-свинцовое стекло. В качестве исходного материала для опыта было сварено стекло по следующему рецепту:

Песка	2000 г
Сурика	1000 »
Соды	1300 »

Варка велась в стекловаренной печи Гусевского хрустального завода в шамотном тигле высотою в 10 см и диаметром верхнего основания в 12 см, а нижнего в 10 см.

Сваренное стекло было вылито в ведро с холодной водой.

Раздробленное в мелкие куски стекло было засыпано в такой же шамотный тигель и поставлено в печь для переплавки. После 9-часового пребывания в печи тигель с жидким стеклом был перенесен в опечек для отжига стекла, обогреваемый полным огнем. Огонь постепенно уменьшался, наконец подача газа была прекращена, и тигель со стеклом медленно охлаждался втечение 19 час.

Затем тигель был разбит и содержимое его разделено на 3 последовательных слоя для дальнейшего исследования.

Определение удельного веса дало такие результаты:

	1	2	3	Среднее
Верхняя часть	2.91	2.90	2.92	2.91
Средняя »	3.08	3.09	3.075	3.08
Нижняя »	3.19	3.21	3.23	3.21

Здесь расслаивание выражено уже очень резко, что еще более выявилось в результатах химического анализа:

	SiO_2	PbO	$Fe_2O_3+Al_2O_3$	Na_2O
Верхняя часть	56.79	16.06	3.20	23.95
Средняя »	49.00	24.80	3.09	23.11
Нижняя »	42.00	27.11	3.10	27.79

Эти цифры показывают, что содержание окиси свинца правильно возрастает, а кремнезема убывает по направлению сверху вниз.

2. Калийно-кальциевое стекло. Исходным материалом для опытов послужил «богемский хрусталь», сваренный по рецепту:

Песка	2000 г
Поташа	720 »
Мела	260 »
Перекиси марганца	75 »
Мышьяка	50 »

Варка проиводилась на Ключинском заводе ранее описанным способом. Охлаждение стекла велось при менее благоприятных условиях, чем на Гусевском заводе. За неимением на заводе опечка тигель с переплавленным жидким стеклом пришлось поместить в закальный рукав, засыпать его песком и оставить охлаждаться втечение 26 час.

Послойное определение удельного веса переплавленного стекла дало следующие результаты:

Верхняя часть	2.47
Средняя »	2.51
Нижняя »	2.53

Таким образом и для этого стекла расслаивание оказалось гораздо более сильно выраженным, чем в первой серии опытов, чего и следовало ожидать заранее.

ТРЕТЬЯ СЕРИЯ ОПЫТОВ

Эта серия опытов была проведена в сотрудничестве с инж. А. Палладиным в 1928 — 1929 гг. и имела целью более детально изучить расслаивание свинцовых стекол при застывании.

Переплавка стекла производилась в обыкновенных фарфоровых лабораторных тиглях в опытной стекловаренной печи Института при температуре 1400° С.

Материалом для опытов послужили:

1) Дротовое стекло со стеклозавода им. Уханова в Москве.

2) Колбочное стекло с того же завода.

3) Свинцовый хрусталь с Гусевского хрустального завода.

Результаты опытов сведены в следующей таблице:

		% SiO_2	% PbO	Уд. вес
1. Дротовое стекло:				
Исходное		70.40	7.30	
Переплавленное	верхн. часть	70.76	5.58	2.56
	нижн. »	70.22	7.85	3.03
2. Колбочное стекло:				
Исходное		72.80	4.65	
Переплавленное	верхн. часть	72.85	4.55	2.63
	нижн. »	72.80	4.86	3.07
3. Свинцовый хрусталь:				
Исходное		56.8	27.76	
Переплавленное	верхн. часть	60.9	23.02	2.93
	нижн. »	56.4	28.14	3.28

Эти опыты показывают, что расслоение сильно отражается на распределении Pb, концентрация которого значительно повышается в нижних частях сплава.

Поставленная настоящей работой задача заключалась в обнаружении способности стекла расслаиваться при застывании, что удалось доказать с достаточной убедительностью. Дальнейшая работа будет заключаться в детальном изучении условий расслаивания отдельных видов промышленных стекол. Помимо чисто теоретического интереса это может иметь и большое практическое значение, так как есть все основания думать, что источником неоднородности стекла во многих случаях является его расслаивание при застывании.

Москва,
Институт стекла
1931, февраль.

B. ŠVECOV (B. SCHWEZOW). ÜBER DIE ABSCHICHTUNG VON GLAS IM LAUFE SEINER ERSTARRUNG

ZUSAMMENFASSUNG

Es war die Frage gestellt, ob Glas bei Erstarrung sich in Schichten sondern kann, ähnlich wie das bei der Erstarrung mancher Metalllegierungen geschieht. Als Versuchsmaterial 9 Gläser verschiedener Zusammensetzung gewählt, welche fein vermahlten wiederholter Schmelzung unterworfen wurden. Die Untersuchungen haben gezeigt dass spezifisches Gewicht und chemische Zusammensetzung im unteren Teile der Glasmasse und in deren oberen Teile in allen Fällen merklich verschieden sind. Damit war die Abschichtung verschiedener Gläser bei ihrer Erstarrung festgestellt.

Оглавление — Sommaire

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала.

Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original.

Цена 2 руб. 50 коп.